
Lesmateriaal Wiskundeplan

1 november 2025

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1.1
1.1	Inleiding	1.1
2	Ontbinden in factoren	2.1
2.1	Ontbinden in factoren	2.1
2.1.A	Oefeningen niveau 1	2.3
2.1.B	Oefeningen niveau 2	2.5
2.1.C	Oefeningen niveau 3	2.6
2.1.D	Uitdagers	2.7
3	Rationale vormen	3.1
3.1	Rationale vormen	3.1
3.1.A	Oefeningen niveau 1	3.3
3.1.B	Oefeningen niveau 2	3.4
3.1.C	Oefeningen niveau 3	3.8
3.1.D	Uitdagers	3.9

1.1 Inleiding

1.1 Inleiding

Wiskundeplan¹ schenkt in de tweede graad extra aandacht aan rekenvaardigheden. Het [lesmateriaal](https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/)² over ontbinden in factoren en rationale lettervormen is hier beschikbaar. Het materiaal staat op zichzelf en kan helpen bij het inoefenen en remediëren van de belangrijkste rekentechnieken uit de eerste en tweede graad van het middelbaar.

Fouten, verbeteringen en andere suggesties kunnen gemeld worden via info@wiskundeplan.be

Bronnen (zoals vermeld op <https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/>)

Delta Nova

E.Jennekens -G.Deen, Wiskunde '68

WPP

¹See Wiskundeplan at <https://wiskundeplan.be/>

²See lesmateriaal at <https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/>

2.1 Ontbinden in factoren

2.1 Ontbinden in factoren

Ontbinden in factoren is het omzetten van een som (van termen) in een product (van factoren). Er bestaan hiervoor verschillende methodes. We ontbinden altijd zo ver mogelijk.

Eigenschap 2.1.1. Afzonderen

Voor het rekenen met lettervormen geldt:

$$ac + ad = a(c + d)$$

$$4x + 4y = 4(x + y)$$

Distributiviteit toepassen in omgekeerde richting noemen we **afzonderen**.

Voorbeeld 2.1.1.

$$1. 24x^3 - 15x^2 + 3 = 3(8x^2 - 5x + 1)$$

$$2. 24x^3 - 15x^2 + x = x(24x^2 - 15x + 1)$$

$$3. 24x^3 - 15x^2 + 3x = 3x(8x^2 - 5x + 1)$$

$$4. 24x^3 - 15x^2 + 3x^4 = 3x^2(x^2 + 8x - 5)$$

Soms kan je door haakjes toe te voegen bij een deel van de termen een factor afzonderen. Dit speciale geval van afzonderen noemt men 'samennemen 2 aan 2'. Zoals volgend voorbeeld illustreert is het mogelijk dat hierna verder vereenvoudigd kan worden.

Voorbeeld 2.1.2. Samennemen 2 aan 2

$$\begin{aligned} 3x^3 - 6x^2 + x - 2 &= (3x^3 - 6x^2) + (x - 2) \\ &= 3x^2(x - 2) + (x - 2) \\ &= (x - 2)(3x^2 + 1) \end{aligned}$$

Merk op dat het ook mogelijk is om commutativiteit te gebruiken en de haakjes anders te plaatsen:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 6x^2 + x - 2 &= (-6x^2 - 2) + (3x^2 + x) \\ &= -2(3x^2 + 1) + x(3x^2 + 1) \\ &= (3x^2 + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

De distributiviteitseigenschap toepassen levert enkele interessante gelijkheden. Aangezien ze vaak voorkomen kregen ze een eigen naam: de merkwaardige producten.

Eigenschap 2.1.2. Merkwaardige producten

Voor het rekenen met lettervormen:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

(kwadraat van een som)

(kwadraat van verschil via $(a + (-b))^2$)

(verschil van twee kwadraten)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(derdemacht van een som)

(derdemacht van een verschil)

Bewijs ➤ Bewijs

2.1 Ontbinden in factoren

De eigenschappen volgen rechtstreeks uit de distributiviteitseigenschap en de definitie van machtsverheffing.

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (ba^2 + 2ab^2 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a^3 - 2a^2b + ab^2) - (ba^2 + 2ab^2 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

■

Onderstaande kennisclip werkt zonder overbodige attributen de merkwaardige producten uit. YouTube

link: <https://www.youtube.com/watch?v=jyQTed3gHDA>



Voorbeeld 2.1.3.

1. $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$
2. $(3 - 2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$
3. $25x^2 - 3 = (5x - \sqrt{3})(5x + \sqrt{3})$
4. $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t - 2)^3$

Opmerking 2.1.1. Een merkwaardige visualisering

Het merkwaardige product $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kan visueel worden voorgesteld.

GeoGebra link: <https://www.geogebra.org/m/yjajmaxb>

2.1.A Oefeningen niveau 1

2.1.A Oefeningen niveau 1

Oefening 2.1.1. Is de gegeven uitdrukking te beschouwen als een product of als een som?

1. $a \cdot b \cdot c + 1$ is een som✓

4. $x \cdot y + x \cdot z$ is een som✓

2. $(x + y)^2$ is een product✓

5. $a \cdot b \cdot (c + 1)$ is een product✓

3. $a \cdot (4b + c)$ is een product✓

Oefening 2.1.2. Onderzoek telkens of je van links naar rechts ontbindt, uitwerkt, of geen van beide.

1. $(3a + b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$ uitwerken✓

5. $3x^3 - 3x + 1 = 3x(x^2 - 1) + 1 = 3x(x - 1)(x + 1) + 1$
uitwerken✓

2. $9a^2 + 6ab + b^2 = (3a + b)^2$ ontbinden✓

6. $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3 = (3a - b)^3$
uitwerken✓

3. $4(x^2 - y^2) = 4x^2 - 4y^2$ uitwerken✓

4. $4(x^2 - y^2) = 4(x - y)(x + y)$ uitwerken✓

Oefening 2.1.3. Ontbind in factoren door af te zonderen.

1. $\sqrt{5}a - 3\sqrt{5}b = \sqrt{5}(a - 3b)$

7. $(y^2 + 3)(y - 2) + y - 2 = (y - 2)(y^2 + 4)$

2. $\sqrt{7}x^2 + 2\sqrt{7} = \sqrt{7}(x^2 + 2)$

8. $(a + 4)(3a + 2) - 3a - 2 = (3a + 2)(a + 3)$

3. $15a^2b + 12ab - 9ab^3 = 3ab(5a + 4 - 3b^2)$

9. $(x - 3)(2x + 3) - (4x + 1)(2x + 3) = (2x + 3)(-3x - 4)$

4. $x(x + 4) - 2(x + 4) = (x + 4)(x - 2)$

5. $2a(3a + 1) + 5b(3a + 1) = (3a + 1)(2a + 5b)$

10. $3(x - 1) + (x - 1)^2 = (x - 1)(x + 2)$

6. $(x - 1)(x + 3) - 5(x + 3) = (x + 3)(x - 6)$

Oefening 2.1.4. Vul aan tot een merkwaardig product, indien mogelijk, en ontbind in dat geval.

1. $9x^2 + 24x + 16$

$= (3x + 4)^2$

4. $121x^2 - 0x - 4$

$= (11x -$

2. $a^2 - 6ab + 9b^2$

$= (a - 3b)^2$

$2)(11x + 2)$

3. $49y^4 - 42y^2 + 9$

$= (7y^2 + 3)^2$

5. $-81 - 4x^2 + 36x$

$= -(2x - 9)^2$

Oefening 2.1.5. Ontbind de tweetermen in factoren

1. $x^2 - 121 = (x - 11)(x + 11)$

6. $4a^2 - 81b^2 = (2a - 9b)(2a + 9b)$

2. $9x^2 + 16 =$ geen oplossing

7. $144x^2 - 49y^4 = (12x - 7y^2)(12x + 7y^2)$

3. $16x^2 - 25 = (4x - 5)(4x + 5)$

8. $5x^2 - 3 = (\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{3})$

4. $4 - 9y^2 = (2 - 3y)(2 + 3y)$

9. $-4x^2 + 25y^2 = (5y - 2x)(5y + 2x)$

5. $36a^2 - 5 = (6a - \sqrt{5})(6a + \sqrt{5})$

10. $-1 + 7x^2 = (\sqrt{7}x - 1)(\sqrt{7}x + 1)$

2.1.A Oefeningen niveau 1

Oefening 2.1.6. Ontbind de drietermen in factoren

1. $25x^2 - 20x + 4 = (5x - 2)^2$

4. $81 + 126t + 49t^2 = (9 + 7t)^2$

2. $x^4 + 6x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2$

3. $25a^2 - 30ab + 9b^2 = (5a - 3b)^2$

5. $121x^2 + 66xy^2 + 9y^4 = (11x + 3y^2)^2$

Oefening 2.1.7. Ontbind de viertermen in factoren door termen samen te nemen.

1. $4x + 4y + ax + ay = (x + y)(4 + a)$

6. $5x^3 - x^2 + 35x - 7 = (5x - 1)(x^2 + 7)$

2. $3x + 5y + 6xy + 10y^2 = (3x + 5y)(1 + 2y)$

7. $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$

3. $2ax + 3a - 2bx - 3b = (2x + 3)(a - b)$

8. $2x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 9 = (2x^2 + 3)(x^4 + 3)$

4. $7ab + 14a + b + 2 = (b + 2)(7a + 1)$

9. $a^2 - 6b - 2ab + 3a = (a - 2b)(a + 3)$

5. $1 - a - b + ab = (1 - a)(1 - b)$

10. $12ab^2 - 1 - 4b^2 + 3a = (3a - 1)(4b^2 + 1)$

2.1.B Oefeningen niveau 2

2.1.B Oefeningen niveau 2

Oefening 2.1.8. Ontbind zo ver mogelijk in factoren.

- | | |
|--|---|
| 1. $4a^3 - 25a = a(2a - 5)(2a + 5)$ | 6. $16a^4 - 9b^4 = (2a - \sqrt{3}b)(2a + \sqrt{3}b)(4a^2 + 3b^2)$ |
| 2. $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ | 7. $-a^2 - 2ab - b^2 = -(a + b)^2$ |
| 3. $18y^5 - 2y^3 = 2y^3(3y - 1)(3y + 1)$ | 8. $4x^5 - 28x^4 + 49x^3 = x^3(2x - 7)^2$ |
| 4. $32a^3b - 50ab^3 = 2ab(4a - 5b)(4a + 5b)$ | 9. $8x^4y - 24x^3y^3 + 18x^2y^5 = 2x^2y(2x - 3y^2)^2$ |
| 5. $144x^3 - x = x(12x - 1)(12x + 1)$ | 10. $(2x^2 + 3)(x + 1) - (x^2 + 4)(x + 1) = (x + 1)^2(x - 1)$ |

Oefening 2.1.9. Ontbind in factoren.

- | | |
|--|---|
| 1. $(x + y)^2 - 16 = (x + y - 4)(x + y + 4)$ | 4. $4(2x + 3)^2 - 20(2x + 3) + 25 = (4x + 1)^2$ |
| 2. $(x + 2y)^2 - 25y^2 = (x - 3y)(x + 7y)$ | 5. $9(5x - y)^2 - 16(3x + 2y)^2 = (3x - 11y)(27x + 5y)$ |
| 3. $(x + 1)^2 - 6(x + 1) + 9 = (x - 2)^2$ | |

Oefening 2.1.10. Ontbind in factoren. Geef voorrang aan de snelste ontbindingstechniek.

- | | |
|---|--|
| 1. $9x^2 - 81x^2y^2 = 9x^2(1 - 3y)(1 + 3y)$ | 11. $(3x + 4)^2 - 8(3x + 4) + 16 = 9x^2$ |
| 2. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$ | 12. $x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$ |
| 3. $-x^6 - 4x^4 - 4x^2 = -x^2(x^2 + 2)^2$ | 13. $2x^3 - 13x^2 - 6x + 39 = (2x - 13)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ |
| 4. $a^2 - (a + b + c)^2 = -(b + c)(2a + b + c)$ | 14. $(5x + 1)^2 + 4(5x + 1) = 5(5x + 1)(x + 1)$ |
| 5. $x^8 - 81 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)(x^4 + 9)$ | 15. $ax^2 + bx^2 - 4a - 4b = (a + b)(x - 2)(x + 2)$ |
| 6. $a^2(a^2 - 3) - 4(a^2 - 3) = (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})(a - 2)(a + 2)$ | 16. $(4x^2 + 1)^2 - (12x - 8)(4x^2 + 1) = (4x^2 + 1)(2x - 3)^2$ |
| 7. $(2x - 2)(3x + 4) - (x - 1)(2x - 1) = (x - 1)(4x + 9)$ | 17. $\sqrt{8} - ab + \sqrt{2}b - 2a = (b + 2)(\sqrt{2} - a)$ |
| 8. $-\sqrt{14}x^3y + \sqrt{21}x^2y + \sqrt{35}x^2y^2 = \sqrt{7}x^2y(-\sqrt{2}x + \sqrt{3} + \sqrt{5}y)$ | 18. $a^3 + b^3 + a^2b^2 + ab = (a + b^2)(a^2 + b)$ |
| 9. $-18s^2t^3 + 84s^2t^2 - 98s^2t = -2s^2t(3t - 7)^2$ | 19. $(a + 2b)^2 - (2a - b)^2 = (3a + b)(-a + 3b)$ |
| 10. $ac^2 + bd^2 - ad^2 - bc^2 = (a - b)(c - d)(c + d)$ | 20. $(a - b)^3 + (a + b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$ |

2.1.C Oefeningen niveau 3

2.1.C Oefeningen niveau 3

Oefening 2.1.11. Ontbind in factoren.

1. $\sqrt{18}xy^2z^3 + \sqrt{32}x^3y^2z = \sqrt{2}xy^2z(3z^2 + 4x^2)$
2. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = (\sqrt{3}x + y)^2$
3. $5y^2 + 2\sqrt{10}y + 2 = (\sqrt{5}y + \sqrt{2})^2$
4. $8a^2 - 4\sqrt{6}a + 3 = (2\sqrt{2}a - \sqrt{3})^2$
5. $\sqrt{5} - a - ab^2 + \sqrt{5}b^2 = -(a - \sqrt{5})(b^2 + 1)$

Oefening 2.1.12. Ontbind in factoren.

1. $a + b + 5c + 4a^2b + 4ab^2 + 20abc = (a + b + 5c)(1 + 4ab)$
2. $p^2 + 2pq - 3pr - 3p - 6q + 9r = (p + 2q - 3r)(p - 3)$
3. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$
4. $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a + b + c)(a + b - c)$
5. $4x^2 + 9y^2 - 16z^2 - 12xy = (2x - 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)$
6. $x^2 - 4y^2 + 20y - 25 = (x + 2y - 5)(x - 2y + 5)$
7. $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay - 2xy = (x - y)(x - y + 2a)$
8. $x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = (x - 1)^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$
9. $4a^2 + 4ab + b^2 - 2a - b = (2a + b)(2a + b - 1)$
10. $\sqrt{3}x^2z - y^5 + xy^2z - \sqrt{3}xy^3 = (xz - y^3)(\sqrt{3}x + y^2)$

Oefening 2.1.13. Ontbind in factoren.

1. $(7x^2 + 5x - 1)^2 - (x^2 - 5x - 1)^2 = 4x(3x + 5)(2x - 1)(2x + 1)$
2. $(x - 2)(x - 3) - (2 - x)(2x - 3) = 3(x - 2)^2$
3. $5x^2 - 4 = (\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2)$
4. $4x^2 - 9y^2 + 2x + 3y = (2x + 3y)(2x - 3y + 1)$
5. $7\sqrt{7}x^6 + 21x^4 + 3\sqrt{7}x^2 + 9 = (\sqrt{7}x^2 + 3)(7x^4 + 3)$
6. $(x + 1)^4 - (x + 1)^2 = (x + 1)^2(x + 2)x$
7. $x^3 - x^2 + \frac{x}{4} = \frac{1}{4}x(2x - 1)^2$
8. $a^6 - a^5 + \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{27}a^3 = a^3(a - \frac{1}{3})^3$
9. $(x - 2y)^2 - 9(x + 2y)^2 = -8(x + y)(x + 4y)$
10. $(2a^2 + a + 2)^2 - (a^2 - 3a - 2)^2 = a(3a - 2)(a + 2)^2$
11. $(a^3 - b^3) - (a - b)^3 = 3ab(a - b)$
12. $a^2 - 2a - 2b - b^2 = (a + b)(a - b - 2)$
13. $x^2 - 6x + 9 - 9y^2 = (x - 3y - 3)(x + 3y - 3)$
14. $4x^2 + 4a - a^2 - 4 = (2x + a - 2)(2x - a + 2)$
15. $(x - 3)^2 + 8(x^2 - 9) + 16(x + 3)^2 = (5x + 9)^2$

2.1.D Uitdagers**2.1.D Uitdagers**

Oefening 2.1.14. Pas het principe uit het voorbeeld toe om de veeltermen te ontbinden.

Voorbeeld 2.1.4.

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\&= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)\end{aligned}$$

1. $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ 3. $x^4 - 3x^2 + 4 = (x^2 + \sqrt{7}x + 2)(x^2 - \sqrt{7}x + 2)$
2. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

Oefening 2.1.15. VWO De som van de kwadraten van de reële oplossingen van $x^{256} - 256^{32} = 0$ is:

- (A) 8
- (B) 128
- (C) 512
- (D) 65536
- (E) $2 \cdot 256^{32}$

Oefening 2.1.16. Finalevraag VWO 2012

Stel n een natuurlijk getal. Noem a het kleinste natuurlijk getal dat je van n moet aftrekken om een volkomen kwadraat te verkrijgen. Noem b het kleinste natuurlijk getal dat je bij n moet optellen om een volkomen kwadraat te verkrijgen. Bewijs dat $n - ab$ een volkomen kwadraat is.

3.1 Rationale vormen

3.1 Rationale vormen

Rationale vormen of gebroken lettervormen zijn “breuken met letters”. Met de rekenregels voor breuken en het **ontbinden in factoren** kunnen deze uitdrukkingen vereenvoudigd worden. De belangrijkste rekentechnieken worden overlopen a.d.h.v enkele voorbeelden.

Voorbeeld 3.1.1. Vereenvoudigen

- (a) Ontbind eerst de teller en de noemer in factoren.
 (b) Deel vervolgens de teller en noemer door hun gemeenschappelijke factoren.

$$1. \frac{a^2b}{5ab^3} = \frac{a}{5b^2}$$

$$\text{Uitwerking: } \frac{a^2b}{5ab^3} = \frac{\cancel{a^1}\cancel{b^1}}{5\cancel{a^1}\cancel{b^1}b^2} = \frac{a}{5b^2}$$

$$2. \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}$$

$$\text{Uitwerking: } \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

$$3. \frac{-x^3+x^2+2x-2}{x^2-1} = \frac{-x^2+2}{x+1}$$

$$\text{Uitwerking: } \frac{-x^3+x^2+2x-2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(-x^2+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x^2+2}{x+1}$$

Voorbeeld 3.1.2. Optellen van twee rationale vormen

- (a) Ontbind de noemers in factoren.
 (b) Zet de breuken op gelijke noemer: dit is het kleinste gemeen veelvoud van de factoren in de noemers.
 (c) Tel de tellers op en behoud de noemers. (De noemers blijven standaard ontbonden.)
 (d) Vereenvoudig door gemeenschappelijke factoren te schrappen.

$$1. \frac{1}{a-b} + \frac{3}{b-a} = \frac{-2}{a-b}$$

$$\text{Uitwerking: } \frac{1}{a-b} + \frac{3}{b-a} = \frac{1}{a-b} + \frac{-3}{a-b} = \frac{1-3}{a-b} = \frac{-2}{a-b}$$

$$2. \frac{-1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x(x-2)}$$

Uitwerking:

3.1 Rationale vormen

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} &= \frac{-1}{x(x+2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{-1}{x(x+2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{-1}{x(x+2)} + \frac{2x}{2x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{-x+2+2x}{x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{x+2}{x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{1}{x(x-2)}
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.1.3. Vermenigvuldigen van twee rationale vormen

(a) Vermenigvuldig de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

(b) Vergeet niet de uitkomst te vereenvoudigen.

$$1. \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab} \cdot \frac{3a^2}{2a+2b} = \frac{3a(a+b)}{2(a-b)}$$

$$\text{Uitwerking: } \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab} \cdot \frac{3a^2}{2a+2b} = \frac{(a^2+2ab+b^2) \cdot 3a^2}{(a^2-ab) \cdot (2a+2b)} = \frac{(a+b)^2 \cdot 3a^2}{a(a-b) \cdot 2(a+b)} = \frac{3a(a+b)}{2(a-b)}$$

Voorbeeld 3.1.4. Delen van twee rationale vormen.

(a) Maar gebruik van de rekenregel $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Dit mag enkel wanneer de teller en noemer allebei een breuk zijn.

$$1. \frac{a+3}{1+\frac{a}{a-1}} = \frac{(a+3)(a-1)}{2a-1}$$

$$\text{Uitwerking: } \frac{a+3}{1+\frac{a}{a-1}} = \frac{a+3}{\frac{a-1+a}{a-1}} = \frac{a+3}{\frac{2a-1}{a-1}} = (a+3) \cdot \frac{a-1}{2a-1} = \frac{(a+3)(a-1)}{2a-1}$$

3.1.A Oefeningen niveau 1

3.1.A Oefeningen niveau 1

Oefening 3.1.1. Vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$

2. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$

3. $\frac{a^2 - 9}{a^2 - 6a + 9} = \frac{a + 3}{a - 3}$

4. $\frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2} = x^2 + a^2$

5. $\frac{2x^2 - 5x + 3}{-4x^2 + 8x - 3} = \frac{1 - x}{2x - 1}$

Oefening 3.1.2. Pas eerst (kruisgewijs) vereenvoudigen toe vooraleer de breuken te vermenigvuldigen.

1. $\frac{3(a - b)}{a(a + b)} \cdot \frac{a^2}{9(a - b)} = \frac{a}{3a + 3b}$

2. $\frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 2)} \cdot \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{x + 1}{x - 2}$

3. $\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2(x + 3)} \cdot \frac{x^2}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{x - 2}{x^2 - 9}$

4. $\frac{4(x - 2)}{10(x + 2)^2} \cdot \frac{15(x + 2)}{2(x - 1)} = \frac{x - 2}{x^2 + x - 2}$

5. $\frac{6a^3}{a + 4} \cdot \frac{(a + 4)^2}{24a^2} = \frac{1}{4}a(a + 4)$

3.1.B Oefeningen niveau 2

3.1.B Oefeningen niveau 2

Oefening 3.1.3. Vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\frac{(b-a)^3}{a^2-b^2} = \frac{-(a-b)^2}{a+b}$

2. $\frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$

3. $\frac{4x^2-12xy+9y^2}{4x^2-9y^2} = \frac{2x-3y}{2x+3y}$

4. $\frac{(2x-y)^2-(x+3y)^2}{(3x-y)^2-(2x+3y)^2} = \frac{3x+2y}{5x+2y}$

5. $\frac{a^2b+ac-ab^2c-bc^2}{a^2c-ab-abc^2+b^2c} = \frac{ab+c}{ac-b}$

6. $\frac{x^3-8}{2x^3+2x^2-8x-8} = \frac{x^2+2x+4}{2(x+2)(x+1)}$

7. $\frac{(x-3)(x-2)-2}{x-1} = x-4$

8. $\frac{(x-2)(x+5)+(x+1)}{x-2} = \frac{x^2+4x-9}{x-2}$

9. $\frac{2a(a+2)-(a^2-a-6)}{(a+2)^3} = \frac{a+3}{(a+2)^2}$

10. $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{-2x^3-8x^2-10x-4} = \frac{-(x+1)}{2(x+2)}$

Oefening 3.1.4. Vereenvoudig indien mogelijk. Zonder eerst in teller en noemer de gemeenschappelijke factoren af.

1. $\frac{3x^4-3x^2}{x^4+x^2} = \frac{3(x^2-1)}{x^2+1}$

2. $\frac{a^2-ab}{b^2-ab} = -\frac{a}{b}$

3. $\frac{a^2-a^6}{-a^7+a^5} = \frac{a^2+1}{a^3}$

4. $\frac{2(x-2)+(x-2)x^2}{x-2} = x^2+2$

5. $\frac{(4a-1)b+(1-4a)c}{b-c} = 4a-1$

6. $\frac{x^3+6x^2+9x}{x^3-9x} = \frac{x+3}{x-3}$

7. $\frac{2x-1+(2x-1)^2}{(2x-1)^3} = \frac{2x}{(2x-1)^2}$

8. $-\frac{(x-1)^3-3(x+1)(1-x)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4}$

9. $\frac{2a(a^2+3)-a^2 \cdot 2a}{a(a^2+3)^2} = \frac{6}{(a^2+3)^2}$

10. $\frac{ax+bx+ay+by+az+bz}{a+b} = x+y+z$

Oefening 3.1.5. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\frac{3}{x+1} + \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2x^2+6x-5}{(x-2)(x+1)}$

2. $\frac{2x+3}{2x-3} + \frac{7}{x} = \frac{17a+3}{3(a+2)}$

3. $\frac{4a+1}{a+2} + \frac{5a}{3(a+2)} = \frac{2x^2+17x-21}{x(2x-3)}$

4. $\frac{4x+1}{2x-3} + \frac{2x+4}{3-2x} = 1$

5. $1 - \frac{x-2}{3x+7} = \frac{2x+9}{3x+7}$

6. $\frac{a}{5} - \frac{a+2}{3a} = \frac{3a^2-5a-10}{15a}$

7. $\frac{2x-1}{x-5} + \frac{x+5}{2x+1} = \frac{5x^2-26}{(x-5)(2x+1)}$

8. $\frac{x-4}{x-1} - \frac{x-1}{x-4} = \frac{-3(2x-5)}{(x-4)(x-1)}$

9. $\frac{x}{x-4} + \frac{x-8}{x-4} = 2$

10. $\frac{a}{a-2} + \frac{2a-1}{2-a} = \frac{-(a-1)}{a-2}$

Oefening 3.1.6. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\frac{2a^2}{(a-1)(a+1)} - \frac{a^2+1}{a^2-1} = 1$

3.1.B Oefeningen niveau 2

2. $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-a)^2} = \frac{2}{(a-b)^2}$
3. $\frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2}{x-3}$
4. $\frac{8}{(2+x)(x-2)} + \frac{2}{2-x} = \frac{-2}{x+2}$
5. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{x+1}$
6. $\frac{4}{2+x} - \frac{8}{4-x^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{2(3x+2)}{(x-2)(x+2)}$
7. $\frac{x-1}{2x-1} + \frac{2}{x-1} - \frac{x}{1-2x} = \frac{x+1}{x-1}$
8. $\frac{5x-9}{(x+2)(x-3)} + \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x(3x-5)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$
9. $\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-4}{(x-3)(x-1)}$
10. $\frac{2x-3}{(2x-1)(x-1)} + \frac{x+3}{(2x-1)(2x+3)} = \frac{5x^2+2x-12}{(x-1)(2x-1)(2x+3)}$

Oefening 3.1.7. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x^2-4x} = \frac{1}{x(x+4)}$
2. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1} = 2$
3. $\frac{4x}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{2(2x-1)}{(x-3)(x+2)}$
4. $\frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{-(2x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$
5. $\frac{1}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{x(x-3)}{(x-2)(x+1)(x^2-2x+1)}$
6. $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} - \frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab} = \frac{a^2}{a+b}$
7. $\frac{a^4}{a^4-b^4} + \frac{1}{a^2-b^2-1} = \frac{a^2+b^2+b^4}{a^4-b^4}$
8. $\frac{1}{x-y} - \frac{3xy}{x^3-y^3} = \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$
9. $\frac{2a}{a^3+a^2b-ab^2-b^3} - \frac{1}{a^2-b^2} = \frac{1}{(a+b)^2}$
10. $\frac{1}{a^2-a} - \frac{1}{a^2+a} + \frac{2a^5}{a^2-a^4} = \frac{-2(a^2+1)}{a}$

Oefening 3.1.8. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1. \frac{x^2 - x}{x - 1} \cdot \frac{5x - 5}{1 - x} = -5x$$

$$2. \frac{x^3 - 8}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 2x + 4}$$

$$3. \frac{xy + y^2}{(x - y)^2} \cdot \frac{x^2 - xy}{(x + y)^2} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

$$4. \frac{2a^2 + 2ab}{ab - b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{2a}{b}$$

$$5. \frac{x^2 + 3x - 10}{2x} \cdot \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{2}(x + 5)$$

Oefening 3.1.9. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1. \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) \left(x - 3 + \frac{1}{x-3}\right) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 2} \quad 4. \left(3 - \frac{1}{a+2}\right) \left(a + 1 + \frac{2a+1}{a-1}\right) = \frac{a(3a+5)}{a-1}$$

$$2. \left(x - \frac{x+2}{x}\right) \left(5 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{(x-2)(5x+4)}{x}$$

$$5. \left(\frac{b+a}{b+2a} - \frac{b-a}{b-2a}\right) \left(\frac{b^2}{a^2} - 4\right) = \frac{-2b}{a}$$

$$3. \left(x - \frac{x-y}{1+xy}\right) \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = \frac{(x^2+1)(x^2+x-2)y}{(x+1)(xy+1)}$$

Oefening 3.1.10. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1. \frac{\frac{5x^2-5}{x^2}}{\frac{6x+6}{x^3}} = \frac{5x(x-1)}{6}$$

$$6. \frac{(x-3)^2}{x} \div (x^2 - 9) = \frac{x-3}{x(x+3)}$$

$$2. \frac{\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5}}{\frac{x^2+4x+4}{x^2+7x+10}} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$7. \frac{5 + \frac{3}{x+1}}{5} = \frac{5x+8}{5(x+1)}$$

$$3. \frac{3 + \frac{1}{x-2}}{3 - \frac{1}{x-5}} = \frac{(x-5)(3x-5)}{(x-2)(3x-16)}$$

$$8. \frac{x+2}{\frac{3}{x+4} - 2} = \frac{-(x+2)(x+4)}{2x+5}$$

$$4. \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$9. \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) = a + b$$

$$5. \frac{\frac{1}{a-b} + 1}{\frac{1}{a-b} - 1} = \frac{-(a-b+1)}{a-b-1}$$

$$10. \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^2} = (x+1)^2$$

Oefening 3.1.11. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1. \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{ab}{a+b}$$

$$3. (y^{-2} - x^{-2}) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{x+y}{xy}$$

$$2. \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a}\right)^{-1} = \frac{a-b}{a+b}$$

Oefening 3.1.12. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1. \frac{(a-1)^3 - (a+1)(a-1)^2}{(a-1)^6} = \frac{-2}{(a-1)^4}$$

$$2. \frac{3x+3}{x^2-2x} - \frac{2x+2}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x+6)}{x(x^2-4)}$$

$$3. \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{y}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{x+y}{xy}$$

$$4. \frac{1+t}{1-t^2} + \frac{1+t}{(1-t)^2} = \frac{2}{(1-t)^2}$$

$$5. \frac{x^2 - y^2 + x + y}{x + y} = x - y + 1$$

$$6. \frac{1}{y} - y / 1 - \frac{1}{y} = -(y+1)$$

$$7. \frac{1+x}{1+2x+x^2} - \frac{1+x}{1+x^3} = \frac{x(x-2)}{x^3+1}$$

$$8. \frac{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}}{x+2} = \frac{1}{x-2}$$

$$9. \frac{x^2-4}{\frac{(x-2)^2}{x+2}} = \frac{(x+2)^2}{x-2}$$

$$10. \frac{1}{\frac{a-b}{ab}} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) = -(a+b)$$

$$11. \frac{1}{a^2-2a} + 5 + \frac{6}{2-a} = \frac{5a^2-16a+1}{a^2-2a}$$

$$12. \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y}$$

$$13. \frac{x+2y}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}} = \frac{xy(x+2y)}{y-2x}$$

$$14. \frac{(x-a)(x^2+2ax+a^2)}{x^3+a^3} \cdot \frac{x^2-ax+a^2}{x^3-a^3} = \frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$$

$$15. \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{x-y}{(x+y)^2} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$16. (y^{-2} - x^{-2}) \cdot \frac{y}{1 - yx^{-1}} = \frac{x+y}{xy}$$

$$17. \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x-1}{x^2(x-2)}$$

$$18. \frac{2x+3}{x^2-7x+12} - \frac{2}{x-3} = \frac{11}{(x-4)(x-3)}$$

$$19. \frac{2x^2-x-6}{\frac{4}{x^2}-1} = \frac{-x^2(2x+3)}{x+2}$$

$$20. \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{-x(x-1)}{x-3}$$

3.1.C Oefeningen niveau 3

3.1.C Oefeningen niveau 3

Oefening 3.1.13. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1. \quad 1 - \frac{a-b \cdot \frac{a-b}{a+b}}{b-a \cdot \frac{a+b}{a-b}} = \frac{2a}{a+b}$$

$$2. \quad \frac{\left(-\left(x + \frac{a^2}{x+a}\right)\left(a + \frac{x^2}{a-x}\right)\right)}{x^6 - a^6} \cdot (x^2 - a^2)^2 = 1$$

$$3. \quad \frac{\frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 - ab + b^2}{b^3 - a^3} - \frac{b}{(a+b)^2}}{\frac{2a^2b^2}{(a-b)(a+b)^2(a^2 + ab + b^2)}} =$$

$$4. \quad \frac{a^2 + ab + b^2}{a^3 + b^3} + \frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 - b^3} + \frac{4ab^4}{a^6 - b^6} = \frac{2a}{a^2 - b^2}$$

$$5. \quad \left(x + \frac{1}{x^2} + 3\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) : \left(\frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2\right) = x(x+1)$$

$$6. \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} + 2}{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - 2} : \frac{\frac{a+2b}{a-2b} + \frac{a-2b}{a+2b} + 2}{\frac{a+2b}{a-2b} + \frac{a-2b}{a+2b} - 2} = 4$$

3.1.D Uitdagers

3.1.D Uitdagers

Oefening 3.1.14. Bereken de waarde van de volgende oneindig doorlopende breuk. We noemen dit een kettingbreuk.

$$1. \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$