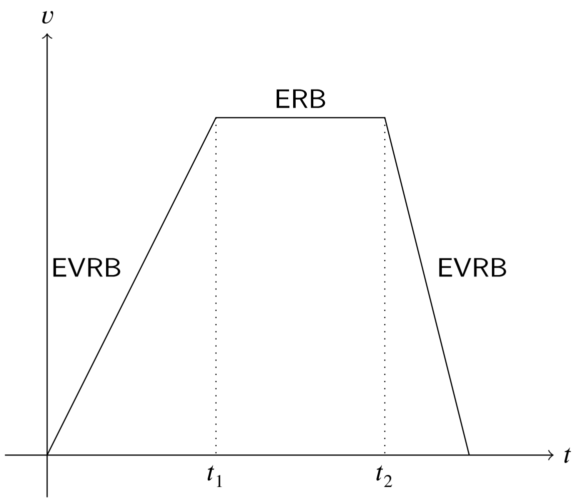
Vraagstukken

Oefening 1. Een trein vertrekt om 12u00 in het station a en rijdt naar het station b, op 15 km van a gelegen. De eerste 1000 m worden afgelegd met een EVRB en de verkregen snelheid is $72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Die snelheid blijft constant tot op 250 m van b. Hier begint de trein te vertragen. Om hoe laat komt de trein in station b toe? Maak de $v(t)$-grafiek.

Uitwerking: We maken eerst een grafiek van het traject van de trein:



Er is gegeven dat

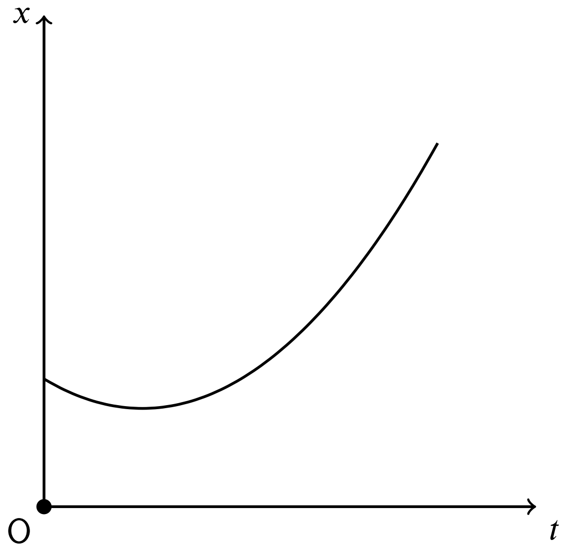
- $v_0 = 0$
- $v_2 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $v_e = 0$

Er geldt

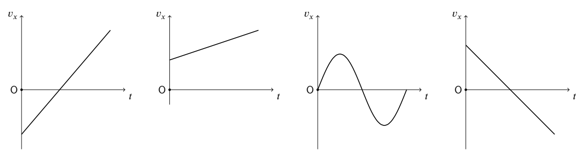
$$
\begin{aligned}
\Delta t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 \\
&= \frac{\Delta x_1}{\overline{v}_1} + \frac{\Delta x_2}{\overline{v}_2} + \frac{\Delta x_3}{\overline{v}_3} \\
&= \frac{\Delta x_1}{\frac{v_0+v_2}{2}} + \frac{\Delta x_2}{v_2} + \frac{\Delta x_3}{\frac{v_2+v_e}{2}} \\
&= \frac{2\Delta x_1}{\overline{v}_1} + \frac{\Delta x_2}{v_2} + \frac{2\Delta x_3}{v_2} \\
&= \frac{2\cdot 1000\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}} + \frac{15\,000\,\mathrm{m} - 1000\,\mathrm{m} - 250\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}} + \frac{2\cdot 250\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \\
&= 100\,\mathrm{s} + 687{,}5\,\mathrm{s} + 25\,\mathrm{s} \\
&= 813\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

De trein komt aan om 12u12m33s

Oefening 2. Een deeltje beschrijft een eendimensionale beweging op de x-as. De positie als functie van de tijd is hiernaast weergegeven in een $x(t)$-diagram. Duid de onderstaande grafiek aan die het best het verloop weergeeft van de snelheidscomponent v van dat deeltje als functie van de tijd.

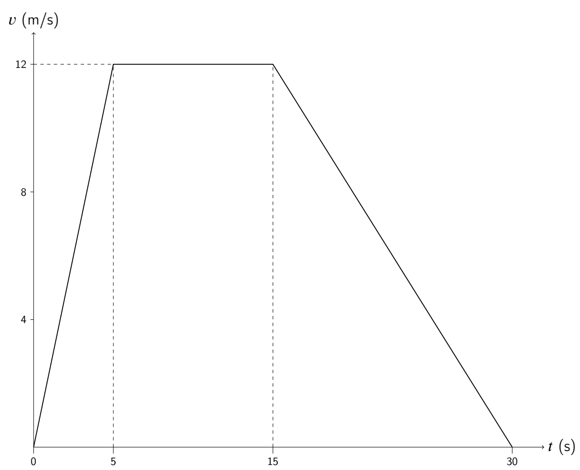


Figuur 1: De grafiek van de plaatsfunctie $x(t)$-diagram



Uitwerking: Grafiek A

Oefening 3. Een deeltje beweegt in de zin van de x-as. De onderstaande grafiek geeft aan hoe de grootte van de snelheid verandert als functie van de tijd.



Figuur 2: snelheidsfunctie

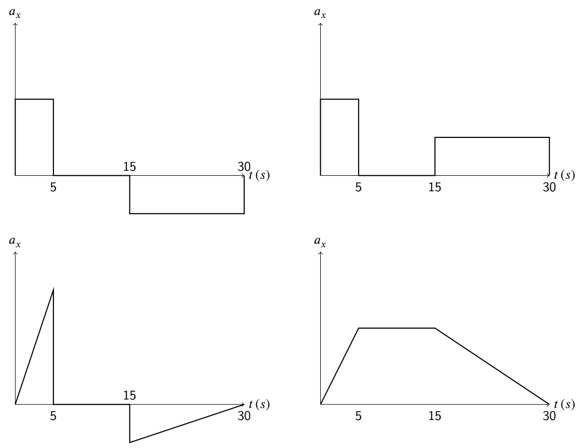
1. De afstand afgelegd na $15\,\mathrm{s}$ bedraagt: $\boxed{150\,\mathrm{m}✓}$

Vraagstukken

2. Na $30\,\mathrm{s}$ heeft het deeltje een welbepaalde afstand afgelegd. Hoe groot zou de constante snelheid van het deeltje moeten zijn om in $30\,\mathrm{s}$ dezelfde afstand af te leggen?

$\boxed{8{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}\checkmark}$

3. Welke figuur geeft kwalitatief het verloop van de versnellingscompent van het deeltje weer?



Uitwerking: Grafiek A

Oefening 4. (∗∗∗) Maggie en Jennifer lopen de $100\,\mathrm{m}$. Beiden doen ze er exact $10{,}2\,\mathrm{s}$ over. Met een eenparige versnelling bereikt Maggie na $2\,\mathrm{s}$ haar maximale snelheid, Jennifer doet dat na $3\,\mathrm{s}$. Hun maximale snelheden houden ze aan voor de rest van de wedstrijd.

1. Wat zijn hun maximale snelheden?

Uitwerking: $v_1 = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_1}$

2. Wat is de versnelling van iedere sprinter?

Uitwerking: $a = \dfrac{2x_2}{(2t_2 - t_1)t_1}$

3. Wie heeft er voorsprong na $6\,\mathrm{s}$, en hoeveel?

Uitwerking: $x_M - x_J = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,M}}(t - \dfrac{t_{1,M}}{2}) - \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,J}}(t - \dfrac{t_{1,J}}{2})$

Oefening 5. Een auto die $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ rijdt, ligt $100\,\mathrm{m}$ achter op een vrachtwagen die $75\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ rijdt. Hoeveel tijd kost het de auto om de vrachtwagen in te halen?

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $V_A = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $x_{0,A} = 0$
- $V_B - 20{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $x_{0,B} = 100\,\mathrm{m}$

Beide auto's bewegegen volgens een ERB. We berekenen:

$$\begin{array}{rcl} x_A & = & x_B \\ v_A t & = & x_{0,B} + v_B t \\ v_A t - V_B t & = & x_{0,B} \Rightarrow t = \dfrac{x_{0,B}}{v_A - v_B} = 24\,\mathrm{s} \end{array}$$

$t = \dfrac{x_0}{v_a - v_v} = 24\,\mathrm{s}$

Oefening 6. De snelheid van een trein verandert eenparig in 2 minuten van $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ tot $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. De trein rijdt gedurende die tijd over een rechte spoorlijn.

1. Bepaal de versnelling.

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $\Delta t = 120\,\mathrm{s}$
- $v_0 = 5{,}56\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $v_1 = 8{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $x_0 = 0$

  Een eenvoudige berekening levert de versnelling: $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}0231\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

2. Bepaal de afstand die de trein heeft afgelegd gedurende deze 2 minuten.

Uitwerking: Invullen in de plaatsfunctie levert:

$$x_1 = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 = 833\,\mathrm{m}$$

Opmerking 1. Er is ook een andere methode:

$$\begin{array}{rcl} \overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} & = & \dfrac{v_0 + v_1}{2} \\ & \Downarrow & \\ \Delta x & = & \dfrac{v_0 + v_1}{2} \cdot \Delta t = 833\,\mathrm{m} \end{array}$$

Oefening 7. Een auto trekt in $5{,}0\,\mathrm{s}$ op van $10\,\mathrm{m/s}$ naar $25\,\mathrm{m/s}$. Wat was de versnelling in de veronderstelling dat de auto een EVRB ondergaat? Welke afstand legde de auto in deze periode af?

Uitwerking: De versnelling vinden we via $a = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} = 3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Via de opmerking voor bovenstaande oefening reken je eenvoudig uit dat $x - x_0 = \left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0) = 87{,}5\,\mathrm{m}$

Oefening 8. Op een vliegdekschip worden vliegtuigen gekatapulteerd op een startbaan van $25\,\mathrm{m}$. Een opstijgend vliegtuig doorloopt dat traject vanuit rust op $1\,\mathrm{s}$ tijd en dat op eenparig versnelde manier.

Zoek zijn versnelling en de snelheid waarmee het de baan verlaat.

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $\Delta x = 25\,\mathrm{m}$
- $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$

- $v_0 = 0$
- $x_0 = 0$

De beweging is een EVRB. Door de gegeven beginwaarden te gebruiken vinden we:

$$\begin{array}{rcl} x & = & t + \frac{1}{2}at^2 \\ & \Downarrow & \\ \Delta x & = & \Delta x = \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \\ & \Downarrow & \\ a & = & \frac{2\Delta x}{(\Delta t)^2} = 50\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{array}$$

Oefening 9. Een auto trekt vanuit rust op tot $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ in $6{,}0\,\mathrm{s}$. Als hij dat doet op een rechte baan met constante versnelling, welke afstand is er dan hiervoor nodig?

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $v_0 = 0$
- $v_1 = 27{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $\Delta t = 6\,\mathrm{s}$
- $x_0 = 0$

Een rechtstreekse berekening levert:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{\Delta v}{\Delta t}t^2 \\ & \Downarrow & \\ \Delta x & = & \frac{\Delta v \cdot (\Delta t)^2}{2\Delta t} = \frac{\Delta v \Delta t}{2} = \frac{(v_1 - v_2)\Delta t}{2} = \frac{v_1}{2}\delta t = 83{,}3\,\mathrm{m} \end{array}$$

Oefening 10. Een vliegtuig landt met een snelheid van $100\,\mathrm{m/s}$. Op de ladingsbaan heeft het een vertraging van $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. Welke afstand heeft het vliegtuig nodig om tot stilstand te komen?

Uitwerking: Er is gegeven dat:

- $v_0 = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $a = -5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- $v_1 = 0$
- $x_0 = 0$

Het vliegtuig beweegt volgens een EVRB. We hebben volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at_1^2 \\ v & = & v_0 + at \end{array} \right.$$

Uit de snelheidsvergelijking halen we $t_1 = \frac{-v_0}{a}$. Invullen in de eerste vergelijking levert:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \\ &= \frac{-v_0^2}{a} + \frac{a v_0^2}{2a^2} \\ &= \frac{-v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} \\ &= \frac{-v_0^2}{2a} \\ &= 1000\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Oefening 11. Een trein vertrekt uit een station en rijdt op een recht spoor met een eenparig versnelde beweging waarvan de versnelling $0{,}50\,\mathrm{m/s^2}$ bedraagt. Hoe groot is de afstand die de trein heeft afgelegd als zijn snelheid $72{,}0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ bedraagt?

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $v_0 = 0$
- $a = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- $v_1 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $x_0 = 0$

De trein beweegt volgends een EVRB. Uit de snelheidsfunctie $v_1 = v_0 + at$ halen we dat $t_1 = \frac{v_1}{a}$. Deze gevonden t_1 substitueren we in de plaatsfunctie:

$$\begin{aligned} x1 &= x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \\ &= \frac{1}{2} a (\frac{v_1}{a})^2 \\ &= \frac{v_1^2}{2a} \\ &= 400\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

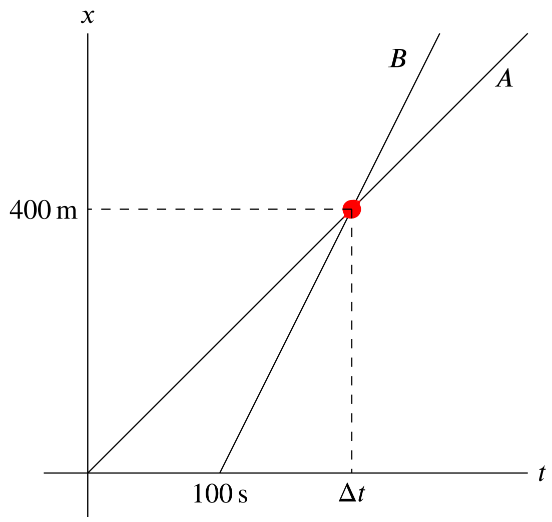
Oefening 12. Twee personen A en B voeren op dezelfde rechte en vanuit dezelfde beginstand een eenparige beweging uit. A vertrekt 100 s eerder dan B. Met een snelheid die dubbel zo groot is als die van A haalt B, op 400 m van het vertrekpunt, A in. Bereken beide snelheden en stel ze grafisch voor.

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $1\,\mathrm{m}$
- $t_{0,B} = 100\,\mathrm{s}$
- $v_b = 2v_a$
- $x = 400\,\mathrm{m}$

$$\begin{cases} x(t) &= v_a t \\ x(t) &= x_0 + v_b(t - t_0) = x_0 - 2v_a(t - t_0) \end{cases}$$

De grafiek van beide functies ziet er als volgt uit:



Als we voor x de ontmoetingsplaats van 400 m nemen, hebben we twee vergelijkingen en twee onbekenden t, v_a. Dit kunnen we oplossen door een variabele te substitueren. We nemen de tijd, $\Leftrightarrow t = \frac{x}{v_a}$ en substitueren deze in vergelijking:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 - 2v_a(t - t_0) \\
&= x_0 - 2v_a\left(\frac{x}{v_a} - t_0\right) \\
&\Updownarrow \\
v_a &= \frac{3x - x_0}{2t_0} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

En de snelheid van B:

$$v_b = -2v_a = \frac{x_0 - 3x}{t_0} = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Oefening 13. Aan het begin van een rechte landingsbaan, start een vliegtuig vanuit rust en versnelt met een constante versnelling langs de grond alvorens op te stijgen. Het legt 600 m af in 12 s. Bepaal de versnelling, de snelheid na 12 s en de afstand afgelegd gedurende de twaalfde seconde.

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $v_0 = 0$
- $x_0 = 0$
- $x_1 = 600\,\mathrm{m}$
- $t_1 = 12\,\mathrm{s}$

Het vliegtuig beweegt volgens een EVRB waarvoor

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}at_1^2 \\
&\Downarrow \\
a &= \frac{2x_1}{t_1^2} = 8{,}33\,\mathrm{m\,s^{-2}}
\end{aligned}
$$

De snelheid vinden we door deze bekomen t_1 te substitueren in de snelheidsfunctie:

$$v_1 = v_0 + at = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

De afgelegde weg is gelijk aan

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_1 - x_2 \\ &= x_1 - \frac{1}{2}at_2^2 \\ &= 600\,\mathrm{m} - 500\,\mathrm{m} \\ &= 96\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Oefening 14. Een auto die $60\,\mathrm{km/h}$ rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na $70\,\mathrm{cm}$ tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing?

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $v_0 = 16{,}7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $v_1 = 0$
- $\Delta x = 0{,}7\,\mathrm{m}$

Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een *uitdrukking* vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.[a]

Uit $v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a}\end{aligned}$$

De versnelling is dan gelijk aan:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$.

[a] M.b.v. de formule $\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...