

NATUURKUNDE 6DE JAAR

KINEMATICA: VECTOREN EN BASISBEGRIPPEN

Inhoudsopgave

0	Inleiding	0.1
0.1	Inleiding	0.1
1	Vectoren	1.1
1.1	Het begrip vector	1.1
1.2	Voorstelling en notatie	1.2
1.3	Bewerkingen met vectoren	1.3
1.3.A	Oefeningen vectoren reeks 1	1.8
1.3.B	Oefeningen vectoren reeks 2	1.10
1.3.C	Oefeningen vectoren reeks 3	1.12
2	Basisbegrippen van de kinematica	2.1
2.1	Inleiding	2.1
2.2	Het referentiestelsel	2.3
2.3	De positie	2.4
2.4	De snelheid	2.9
2.5	De versnelling	2.14
2.6	Oefeningen kinematica	2.18

0.1 Inleiding

0.1 Inleiding

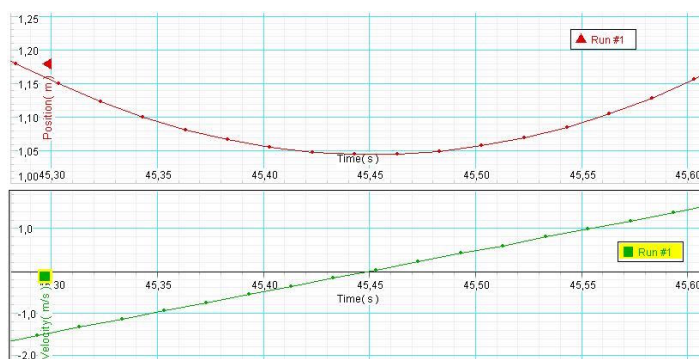
Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De overgang van rust naar beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de bewegingsverandering. De ontstane beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.¹

Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten *dát* de bal beweegt maar ook *hóe* ze dat doet. Voor de verklaring is een 'stoot geven' niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn.²

Als de kracht de oorzaak is van de bewegingsverandering, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels³ te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met trappen op de fiets, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1. Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\text{ km h}^{-1}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.



Figuur 1: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp

Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wilt zeggen dat de *verandering in snelheid* steeds gelijk is. Er komt per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bij. De appel valt sneller en sneller, maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we

¹Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

²Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We verklaren niet in termen van 'waarom' maar eerder met 'waardoor'. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

³Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk ??.

0.1 Inleiding

hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid een tegengestelde zin hebben. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.

Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.



Figuur 2: Een prachtig schouwspel...

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting en zin van de kracht.

We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting en zin van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg...

In hoofdstuk 1 bekijken we *vectoren* als voorkennis om fysische objecten te beschrijven. In hoofdstuk 2, 3 en 4 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we **kinematica**. In hoofdstuk 5 en 6 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we **dynamica**. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we **mechanica**.

1.1 Het begrip vector

1.1 Het begrip vector

De natuurkunde beschrijft de niet levende natuur met grootheden die worden opsplijst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: "Naar waar gericht?" zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

Stel dat *een helikopter vliegt met een snelheid van 40 km h^{-1}* . Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, ..." Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is een vector. Als *het zwembadwater een temperatuur van 27°C heeft*, is er geen zinnig antwoord op de vraag *naar waar?*. Temperatuur is een scalar.

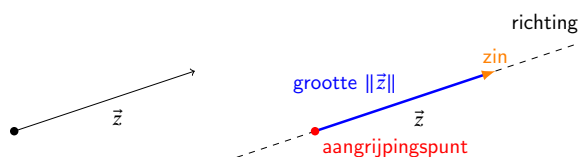
Een vectoriële grootheid heeft drie variabele kenmerken: grootte, richting en zin. Voorbeeld: de helikopter vliegt aan 40 km h^{-1} , horizontaal en naar het zuiden. Een scalaire grootheid heeft slechts één kenmerk: de grootte (waarin soms ook een teken vervat zit). Voorbeeld: een sneeuwbal heeft een temperatuur van -10°C .

De plaats waarop de vector van toepassing is, noemt men het aangrijpingspunt van de vector.

1.2 Voorstelling en notatie

1.2 Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}$, $\vec{a}$, $\vec{x}$, ... en wordt altijd bij de pijl gezet ter benoeming. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft alle kenmerken die een vector vastleggen weer.



Figuur 3: De vector $\vec{z}$ met zijn kenmerken.

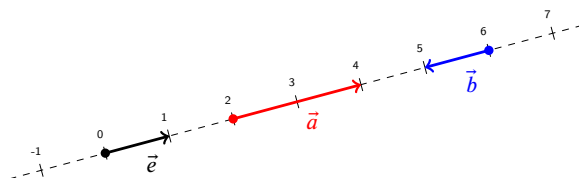
Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden als positief beschouwd, vectoren tegen de zin van de referentie-as als negatief.

De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$ en is altijd positief. De grootte komt immers overeen met de lengte van de vector (en een lengte is altijd positief).

De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties. Hiermee kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.

In onderstaande tekening is $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 2.

Voor de vector $\vec{b}$ geldt dat $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.



Figuur 4: Vectoren en aangrijpingspunten.

Opmerking 1.2.1. Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$. Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$. Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

Vlugge Vraag

Waarom mag je **niet** noteren dat $\vec{c} = 0$?

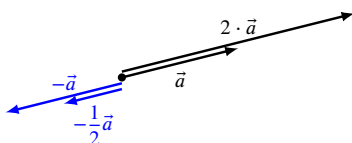
1.3 Bewerkingen met vectoren

1.3 Bewerkingen met vectoren

Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

test naar github

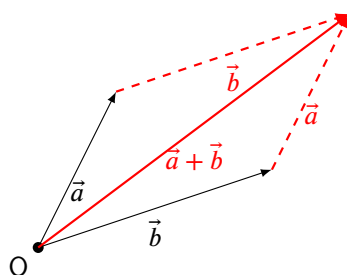
Een vector kan 'herschaald' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalaire vermenigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$.



Figuur 5: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren van dezelfde grootte met hetzelfde aangrijppingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de kopstaartmethode of parallellogrammethode.



Figuur 6: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren op te tellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultante berekend met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (aangepaste) cosinusregel voor de lengte van $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Vlugge Vraag

Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan?

Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting en dezelfde zin hebben? Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting en tegengestelde zin hebben?

Eigenschap 1.3.1. ► Twee versies van de cosinusregel ?

De 'klassieke' cosinusregel wordt geformuleerd voor de zijden van een driehoek, en zegt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

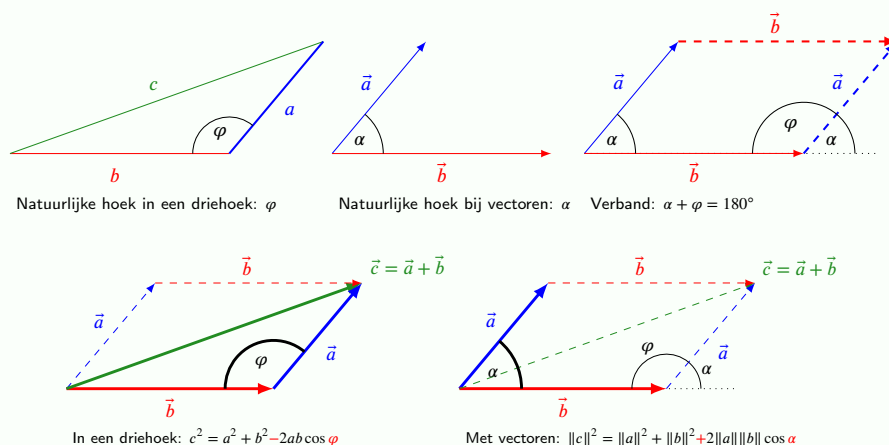
met φ de overstaande hoek van zijde c .

1.3 Bewerkingen met vectoren

Merk op dat het teken van de derde term verschillend is. Waarom is dat zo, en hoe moet je dat onthouden?

In een driehoek gebruik je natuurlijk wijze niet de hoek α tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, maar wel de *complementaire* hoek φ tussen de lijnstukken a en b .

Volgende tekening en redenering geeft het verband tussen beide situaties, en de bijhorende formuleringen. Het enige verschil is een minteken, en dat komt omdat je afhankelijk van de situatie liever met één van de twee complementaire hoeken werkt. En zoals je op de goniometrische cirkel onmiddellijk kan zien, hebben complementaire hoeken tegengestelde cosinussen. Dat precies dat verschil wordt gecompenseerd door het extra minteken.



Figuur 7: Omdat $\alpha + \varphi = 180^\circ$, is $\cos \varphi = -\cos \alpha$.

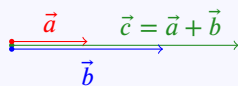
Het verband tussen beide versies van de cosinusregel is nu duidelijk: afhankelijk van welke hoek je neemt tussen de richtingen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ krijg je ofwel een plusteken, ofwel een minteken. Het is niet de moeite om dat teken van buiten te leren, want het teken volgt onmiddellijk uit het speciale geval wanneer $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan: dan zijn zowel α als φ dus 90° , en de cosinus is dus nul.^a

Als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *kleiner* wordt, wordt ook $\|\vec{c}\|$ *kleiner* en moet de derde term in de cosinusregel *negatief* zijn. Als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *groter* wordt, wordt ook $\|\vec{c}\|$ *groter* en moet de derde term in de cosinusregel *positief* zijn. Naargelang je met de hoek α rekent dan wel met de hoek φ wordt het teken van de term met de cosinus dus aangepast.

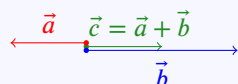
^aGelukkig, want de Stelling van Pythagoras zegt dat bij een rechte hoek $c^2 = a^2 + b^2$, en dat klopt enkel met de cosinusregel als de derde term nul is.

Voorbeeld 1.3.1.

1. Als in onderstaande figuur $\|\vec{a}\| = 3 \text{ N}$ en $\|\vec{b}\| = 5 \text{ N}$, dan is hier $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 5 \text{ N} + 3 \text{ N} = 8 \text{ N}$.

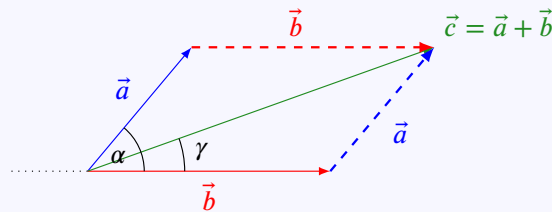


2. Als in onderstaande figuur $\|\vec{a}\| = 3 \text{ N}$ en $\|\vec{b}\| = 5 \text{ N}$, dan is hier $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| = 5 \text{ N} - 3 \text{ N} = 2 \text{ N}$.



3. Als in onderstaande figuur $\|\vec{a}\| = 3 \text{ N}$, $\|\vec{b}\| = 5 \text{ N}$ en $\alpha = 50^\circ$, dan moet $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$ worden berekend met de cosinusregel.

1.3 Bewerkingen met vectoren



De grootte van de resultante $\vec{c}$ wordt bepaald met bovenstaande versie van de cosinusregel:

$$\begin{aligned}\|\vec{c}\| &= \|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 50^\circ} \approx 7,3 \text{ N.}\end{aligned}$$

Opmerking 1.3.1. In het algemeen geldt dus **niet** dat $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. In welk(e) geval(len) geldt de gelijkheid wel?

De **richting van de resultante** (d.w.z. de hoek γ) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \gamma}{\|\vec{b}\|} &= \frac{\sin \alpha}{\|\vec{c}\|} \implies \sin \gamma = \frac{\|\vec{b}\| \sin \alpha}{\|\vec{c}\|} \\ \gamma &= \arcsin\left(\frac{5 \cdot \sin 50^\circ}{7,3}\right) \approx 18^\circ\end{aligned}$$

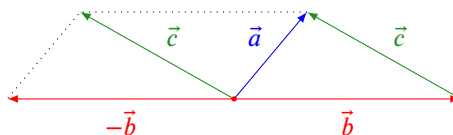
De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som berekenen van meerderen vectoren. Indien er dus meer dan twee vectoren worden samengesteld, tel je eerst twee ervan met elkaar op en het resultaat daarvan tel je met de volgende op, enzovoort totdat alle vectoren in de som zitten (zoals ook met de optelling van getallen gebeurt)

Verskil van twee vectoren

Net zoals bij getallen $5 - 3 = 5 + (-3)$, kan je ook bij vectoren een verschil schrijven als een som met de tegengestelde:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$ is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Figuur 8: Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a} - \vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{a}$.

De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componenten volgens de assen. In bepaalde contexten is het vaak erg nuttig om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de

1.3 Bewerkingen met vectoren

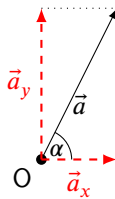
component volgens de x -as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de y -as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De grootte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 9: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

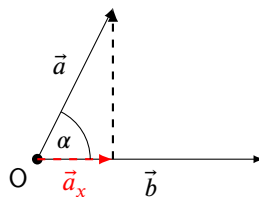
Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.

Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector. Het scalair product wordt als volgt gedefinieerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}_x\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Vlugge Vraag

Is de eerste bewerking ' $\cdot$ ' dezelfde als de tweede bewerking ' $\cdot$ '? Verklaar.



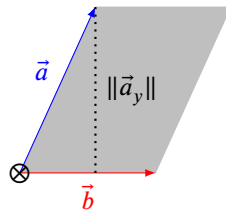
Figuur 10: De projectie van de vector $\vec{a}$ op $\vec{b}$

Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

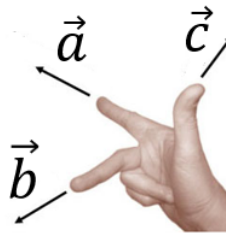
Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallelogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}_y\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$

1.3 Bewerkingen met vectoren



Figuur 11: Het vectorieel product



Figuur 12: De rechterhandregel

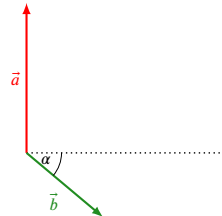
Opmerking 1.3.2. Een vector met zin in het blad wordt genoteerd met $\otimes$. Een vector met zin uit het blad wordt genoteerd met $\odot$.

1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

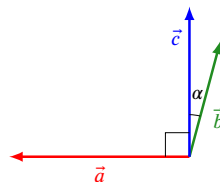
1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 1.3.1. Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.

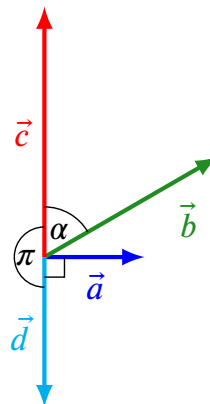
1. $\|\vec{a}\| = 5 \text{ N}$, $\|\vec{b}\| = 4 \text{ N}$, $\alpha = 40^\circ$



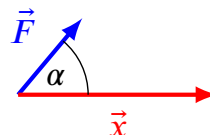
2. $\|\vec{a}\| = 4 \text{ N}$, $\|\vec{b}\| = 2,5 \text{ N}$, $\|\vec{c}\| = 3 \text{ N}$, $\alpha = 15^\circ$



3. $\|\vec{a}\| = 5 \text{ N}$, $\|\vec{b}\| = 8 \text{ N}$, $\|\vec{c}\| = 15 \text{ N}$, $\|\vec{d}\| = 3 \text{ N}$, $\alpha = 60^\circ$



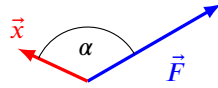
Oefening 1.3.2. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3 \text{ N}$, $\|\vec{x}\| = 4 \text{ m}$ en $\alpha = 50^\circ$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.
3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$
4. $\vec{F} \times \vec{x}$

1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 1.3.3. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 7\text{ N}$, $\|\vec{x}\| = 2\text{ m}$ en $\alpha = 125^\circ$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.
 2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.
 3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$
 4. $\vec{F} \times \vec{x}$
-

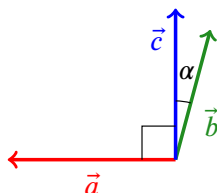
1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

Oefening 1.3.4.

Gegeven de drie waarvoor geldt $\|\vec{a}\| = 4 \text{ N}$, $\|\vec{b}\| = 2,5 \text{ N}$, $\|\vec{c}\| = 3 \text{ N}$, $\alpha = 15^\circ$

Constureer en bepaal de groottes van:



1. $\vec{a} - \vec{b}$
2. $\vec{b} - \vec{a}$
3. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
4. $3\vec{a} - 2\vec{b}$
5. $4\vec{b} + \vec{c}$
6. $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$
7. $3\vec{a} - 4\vec{c}$

Oefening 1.3.5. Als $\vec{F} \perp \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$
2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$
3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$
4. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$
5. $\vec{F} \times \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$
6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$
7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$
8. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

Oefening 1.3.6. Als $\vec{F} \parallel \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$
2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$
3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$
4. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$
5. $\vec{F} \times \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

8. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

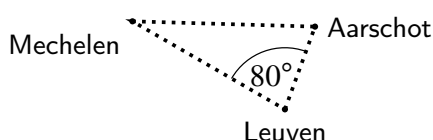
1.3.C Oefeningen vectoren reeks 3

1.3.C Oefeningen vectoren reeks 3

Oefening 1.3.7. Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst 15 m evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van 45° met de zijlijn 18 m naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 1.3.8. Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt 9 m evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt 17 m in een richting die een hoek van 35° maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 1.3.9. Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van 10 m/s en 20 m/s. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.



1. Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!
2. Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?

Oefening 1.3.10. Toon aan dat $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$ met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Oefening 1.3.11. Geldt er algemeen dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$? Geldt er dat $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$? Verklaar kort.

Oefening 1.3.12. Kan er gelden dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.

2.1 Inleiding

2.1 Inleiding

Kinematica⁴ is het onderdeel van de fysica dat de **bewegingen van voorwerpen beschrijft**, zoals vallende appels, rollende knikkers of rijdende auto's, maar ook de beweging van de maan rond de aarde of de aarde rond de zon. De kinematica beperkt zich tot het *beschrijven* van de beweging, zonder de onderliggende *oorzaak* te onderzoeken. De redenen waarom iets op een bepaalde manier beweegt worden verder behandeld in de *dynamica*.

In dit hoofdstuk worden eerst de **basisbegrippen** en **basisgrootheden** van de kinematica behandeld, namelijk de vectoriële grootheden **positie**, **snelheid** en **versnelling**, hun verbanden onderling en hun afhankelijkheid van de scalaire grootheid **tijd**. Vervolgens gebruiken we die begrippen om enkele concrete soorten bewegingen te bestuderen (rechtlijnige, cirkelvormige, snelle, trage, versnellende en vertragende, enzovoort).

Voorbeeld 2.1.1. Als een appel van een boom valt, kan je allerlei vragen stellen over deze valbeweging:

- Hoe ver valt de appel van de boom?
- Hoe lang duurt het voor de appel de grond raakt?
- Hoe snel valt de appel? Is die snelheid altijd dezelfde, of valt een appel altijd maar sneller?
- Als de snelheid van de appel verandert, hoe groot is ze dan bij het begin van de val? En na één seconde? En op het moment dat de appel de grond raakt?

De kinematica vraagt zich niet af *waarom* een appel naar beneden valt, en bijvoorbeeld niet naar boven. In het latere onderdeel *dynamica* worden *krachten* bestudeerd die de bewegingen beïnvloeden. We zullen zien dat krachten eigenlijk alleen maar de *veranderingen van bewegingen* veroorzaken.

Voorbeeld 2.1.2. Als je een krijtje gooit naar het bord, kan je je daarover allerlei vragen stellen:

- Vliegt dat krijtje in een rechte lijn naar het bord? Of eerder in een cirkelbaan? Of misschien een ellips? Of nog een andere vorm?
- Hoe snel vliegt het krijtje? Vertraagt het tijdens zijn vlucht, of versnelt het eerder omdat het ook wat naar beneden valt?
- Als de leerkracht het laatste stukje van de baan van het krijtje nauwkeurig heeft geregistreerd, kan hij dan weten welke leerling gegooit heeft?
- Vliegen lange en korte krijtjes even snel? Vliegen witte en rode krijtjes even snel? Vliegen krijtjes met een scherpe punt sneller?
- Mag je eigenlijk wel met krijtjes gooien?
- Als je snel genoeg gooit, en opzettelijk het bord mist, is het dan theoretisch mogelijk om het krijtje in een baan om de aarde te krijgen? Hoe snel zou je moeten gooien?

Sommige van deze vragen worden behandeld in de kinematica, andere in de dynamica. Één vraag past natuurlijk beter binnen een cursus zingeving en ethiek, maar dat had je wel door...

⁴Het woord 'kinematica' is net zoals 'cinema' en 'kinesist' afgeleid van het Griekse *κίνημα* dat 'beweging' betekent.

2.1 Inleiding

Om even over na te denken ...

Een buffel tracht loodrecht een 300 m brede rivier over te steken met een snelheid van 1,00 m/s. De stroomsnelheid bedraagt 1,50 m/s.

- (a) In welke tijd bereikt de buffel de overzijde?
- (b) Hoever drijft de buffel af?
- (c) Met welke snelheid beweegt de buffel voor iemand die op de oever staat?
- (d) Waarom is het antwoord op de vorige vraag niet simpelweg $1,00 \text{ m/s} + 1,50 \text{ m/s} = 2,50 \text{ m/s}$?

Om even over na te denken ...

Vanuit de laadbak van een auto gooit een man een zware medicine bal omhoog. Een klein beetje later vangt hij die bal terug op. Zie het volgende filmpje voor de reële situatie:

YouTube link: <https://www.youtube.com/watch?v=j1URC2G2qnc>



- (a) Beschrijf de baan van de bal zoals die eruit ziet voor iemand die naar de rijdende auto kijkt.
- (b) Beschrijf de baan van de bal zoals die eruit ziet voor de werper in de auto.
- (c) Schets de snelheidsvector van de bal voor het moment dat de bal op zijn hoogste punt is, voor een waarnemer die naar de rijdende auto kijkt.
- (d) Doe hetzelfde voor de snelheidsvector van de bal op een moment dat hij voorbij zijn hoogste punt is.

2.2 Het referentiestelsel

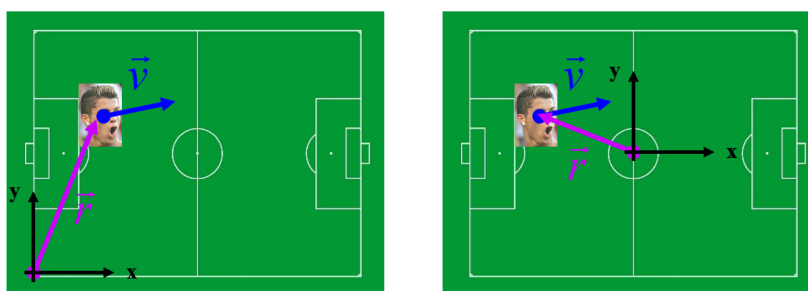
2.2 Het referentiestelsel

Als je een vogel ziet vliegen, kan je deze beweging op verschillende manieren beschrijven: de vogel kan *stijgen* of een *duikvlucht* nemen. De vogel kan *omdraaien* of – indien het een kolibrie is – misschien zelfs op een vaste plaats *blijven fladderen*. Al deze beschrijvingen gebeuren met een referentiepunt in het achterhoofd. Je kan alleen maar stijgen ten opzichte van iets anders.

Elk bewegend systeem wordt sluitend beschreven ten opzichte van een **referentiestelsel**. Dat is een assenstelsel dat als het ware in de ruimte geplaatst wordt en waarin bijvoorbeeld de positie kan worden vastgelegd. Ten opzichte van dit stelsel kan je de plaats met een positievector beschrijven en een snelheidsvector gebruiken om de snelheid te beschrijven.

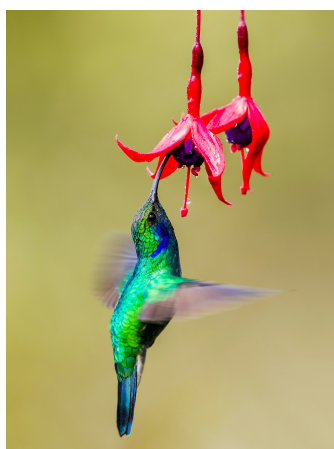
De keuze van het referentiestelsel is altijd *vrij*. Het is belangrijk om die keuze telkens duidelijk te maken. Stel je voor dat je op dit moment gedreven natuurkunde aan het studeren bent aan een bureau en je houdt je pen op *ooghoogte*, hoe 'hoog' bevindt je pen zich dan? Meet je dit vanaf je tafelblad, de vloer, het straatniveau, het aantal meters boven de zeespiegel, ...? In welke eenheid meet je dit? Wat is je eenheidsvector en in welke richting kies je de positieve as?

Meestal wordt geopteerd voor een referentiestelsel dat stilstaat. In onderstaand voorbeeld van het voetbalveld is de positie $\vec{r}$ van de voetballer duidelijk verschillend naargelang het gekozen referentiestelsel.



Figuur 13: Twee verschillende referentiestelsels

Oefening 2.2.1. De kolibrie in onderstaande foto blijft ter plekke in de lucht fladderen onder de bloem. Geef twee referentiestelsels waarin deze vogel **niet** stilstaat.



2.3 De positie

2.3 De positie

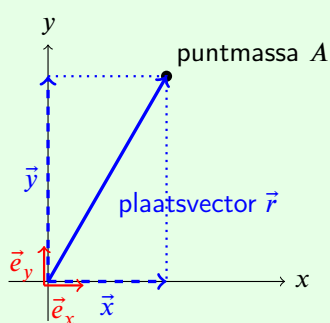
Positie en plaatsfunctie

Met behulp van een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden beschreven met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt, heeft deze plaatsvector één, twee of drie vectorcomponenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De getalcomponenten of kortweg componenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten x, y en z . Dat zijn scalaire grootheden, omdat ze een getalcomponent en een eenheid bevatten.

Definitie 2.3.1. De positie van een puntmassa A wordt vectorieel beschreven met de **plaatsvector** $\vec{r}$. Het is de vector die van de oorsprong wijst naar het punt waar de massa zich bevindt. Een plaatsvector $\vec{r}$ kan ontbonden worden volgens de assen:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

Hierin is $co(A) = (x, y)$ de coördinaat van het punt en zijn $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ eenheidsvectoren volgens de assen.



Figuur 14: De plaatsvector $\vec{r}$

Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De componenten ervan hangen dus af van de tijd. Elke coördinaatfunctie geeft voor elk moment t de coördinaat van de puntmassa volgens een welbepaalde-as. Al deze componentfuncties samen beschrijven op een equivalent manier de volledige beweging van de puntmassa.

Opmerking 2.3.1. ► Over vectorfuncties

De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ geeft voor elk tijdstip t de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. In het algemeen is een dergelijke vectorfunctie ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt er gewerkt met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t), y(t)$ en $z(t)$.

Bij eindimensionale bewegingen is er slechts één as nodig om de beweging te beschrijven. Het is dan handig om met de componenten te werken, die tijdsafhankelijk kunnen zijn.⁵

De positie op een welbepaald tijdstip t_1 wordt genoteerd als ⁶

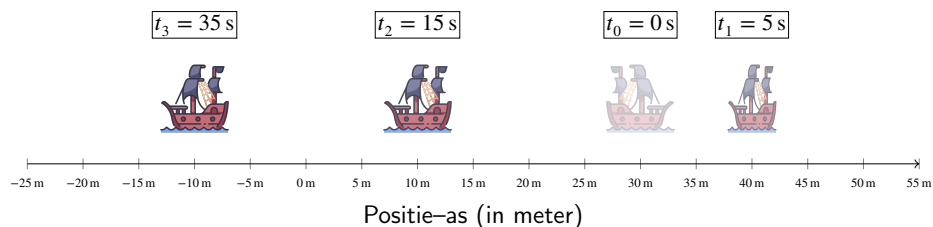
$$x_1 = x(t_1).$$

⁵In fysica gebruiken we wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x , maar het symbool t . En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat die de beeldwaarden zijn van de functie f , x is afhankelijk van t .

⁶Natuurlijk kan de index 1 ook vervangen worden door andere indices. Voorbeelden zijn $x_0 = x(t_0)$ en $x_2 = x(t_2)$.

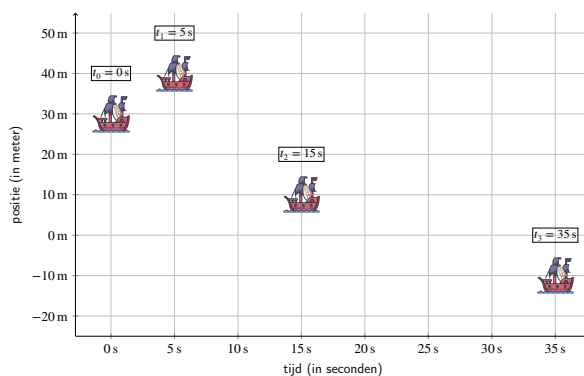
2.3 De positie

In onderstaande figuur zie je de rechtlijnige tocht van een zeilschip. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \dots$ wordt weergegeven waar het schip zich bevindt.



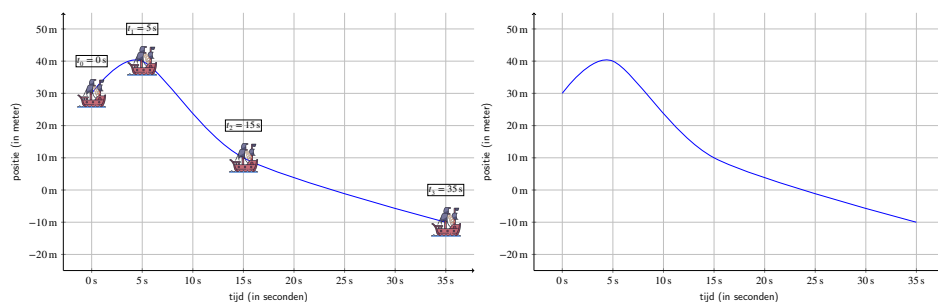
Figuur 15: De positie van de zeilboot voor elke tijd t

In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.⁷ In bovenstaande figuur wordt boven elke zeilboot aangegeven op welk tijdstip de boot daar werd waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_1 = 5$ s op de positie 40 m, dus $x_1 = 40$ m. De startpositie van de zeilboot x_0 is gelijk aan 30 m, want voor $t_0 = 0$ s geldt $x(0) = 30$ m. In plaats van de tijd boven elke zeilboot te noteren, is het ook mogelijk om de tocht op een tijd-as uit te zetten.



Figuur 16: De positie van de zeilboot met een tijd-as

De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten t_0, t_1, t_2, t_3 en t_4 . De boot heeft natuurlijk ook op *elk moment hiertussen* een positie ...



Figuur 17: De plaatsfunctie van de zeilboot voor elke $t \in [0, 35]$

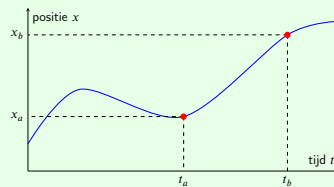
Definitie 2.3.2. De plaatsfunctie $x(t)$ geeft voor elk moment t de component x van de positie van het voorwerp. $x(t)$ geeft de plaatsfunctie die je kan uitzetten in een grafiek met verticale x -as en

⁷Einstein gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd*.

2.3 De positie

horizontale t -as. De positie op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$x_a = x(t_a)$$

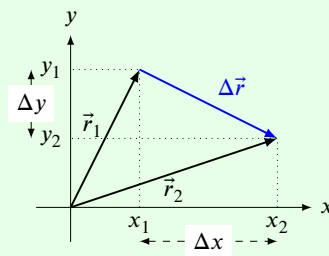


Figuur 18: De grafiek van een plaatsfunctie $x(t)$

De **verplaatsing** tussen t_1 en t_2 is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2 , genoteerd met een $\Delta \vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

Definitie 2.3.3. De **verplaatsing** $\Delta \vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

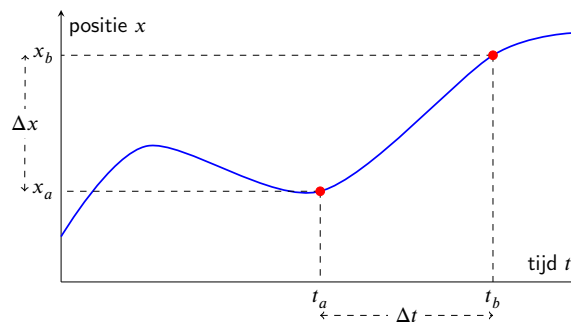


Zoals aangegeven in de figuur kan ook de verplaatsingsvector $\Delta \vec{r}$ ontbonden worden.

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) \\ &= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y \\ &= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y \end{aligned}$$

Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{\text{eind}} - x_{\text{begin}}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen t_0 en t_1 is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 40 \text{ m} - 30 \text{ m} = 10 \text{ m}$. Tussen t_2 en t_3 is de verplaatsing gelijk aan $\Delta x = x_3 - x_2 = -10 \text{ m} - 10 \text{ m} = -20 \text{ m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:

2.3 De positie



Figuur 19: De verplaatsing op de plaatsfunctie

Vlugge Vraag

Bereken de verplaatsing $\Delta x = x_4 - x_1$ van de zeilboot en duid deze verplaatsing aan op de grafiek.

Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindinglijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging. Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben (willekeurig, cirkelvormig, parabolvormig, ellipsvormig, ...). Soms is men geïnteresseerd in een **baanvergelijking** waarin men de afhankelijkheid tussen x en y wiskundig neerschrijft. Indien de functies $x(t)$ en $y(t)$ gekend zijn, kan soms een (expliciete) baanvergelijking bekomen worden door één voorschrift uit te werken naar t en dit vervolgens te substitueren in de andere vergelijking.

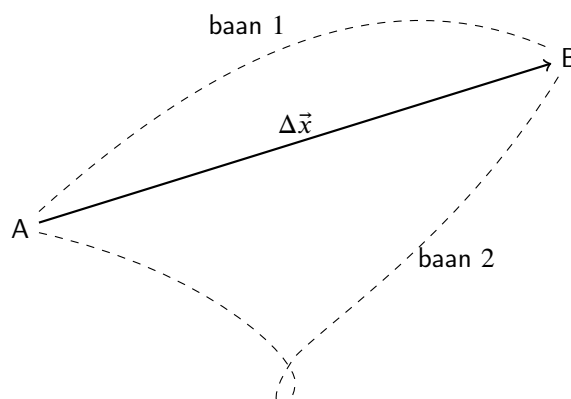
Voorbeeld 2.3.1. De positie van puntmassa A in het xy -vlak wordt gegeven door

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = -t^2 - 3t \end{cases}$$

Een rechtstreekse berekening levert $x = t^7 \Rightarrow t = \sqrt[7]{x}$. Dit substitueren in het voorschrift $y(t)$ geeft de baanvergelijking $y(x)$:

$$y = -t^2 - 3t \Rightarrow y(x) = -(\sqrt[7]{x})^2 - 3\sqrt[7]{x}$$

Let op: de *verplaatsing* is niet hetzelfde als de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar je hebt wel degelijk afstand afgelegd. De verplaatsing geeft enkel het verschil (in vogelvlucht) tussen begin- en eindpunt, terwijl de afgelegde weg s gaat over de afstand die het bewegende voorwerp over zijn baan aflegt.



2.3 De positie

Figuur 20: Verplaatsing en afgelegde weg

2.4 De snelheid

2.4 De snelheid

Een voorwerp in beweging heeft een snelheid. De ervaring leert dat hoe groter de snelheid, hoe groter de verplaatsing in een bepaald tijdsinterval. Als je fietst aan 30 km/h, leg je op één uur tijd 30 km af. Als je wandelt aan 5 km/h, leg je op één uur tijd slechts 5 km af. De snelheid van een voorwerp kan volledig bepaald worden met behulp van de plaatsfunctie. Een voorwerp heeft immers snelheid als de plaats of positie verandert.

We behandelen eerst de snelheid in één dimensie. Daarna kijken we naar de snelheid in twee dimensies, die wordt opgebouwd als samenstelling van twee (eendimensionale) snelheidscomponenten.

Snelheid bij eendimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definitie 2.4.1. In één dimensie wordt de gemiddelde snelheid $\bar{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen gedefinieerd als

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \text{m/s}$.

In het traject van de zeilboot is de gemiddelde snelheid van de boot tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 \text{ m} - 40 \text{ m}}{15 \text{ s} - 5 \text{ s}} = \frac{-30 \text{ m}}{10 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}$. Deze gemiddelde snelheid is negatief, wat betekent dat de zeilboot tegen de zin van de referentie-as is bewogen.

Vlugge Vraag

Hoe je op de plaatsgrafiek van de zeilboot de gemiddelde snelheid tussen t_1 en t_2 aanduiden?

Ogenblikkelijke snelheid bij eendimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\bar{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities x_1 en x_2 . De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip t een positie x toe aan een puntmassa. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment t , één ogenblik, is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn ...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

Om even over na te denken ...

Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul. **Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?**

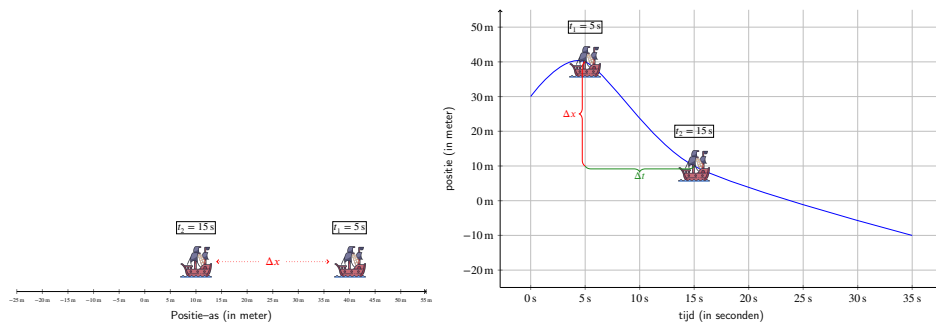
‘Ja, maar’, ga je zeggen, ‘de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!’ Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn, maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek⁸ te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen, maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de nieuwe snelheid te kunnen registreren.

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Om de ogenblikkelijke snelheid op $t_1 = 5 \text{ s}$ te kennen, lijkt het eerste (en misschien wel enige...) idee om te vertrekken van de gemiddelde snelheid tussen t_1 en t_2 die hierboven werd berekend. Deze gemiddelde snelheid kan je beschouwen als een erg ruwe schatting van de snelheid op $t_1 = 5$.

⁸Die je hebt moeten ingeven...

2.4 De snelheid

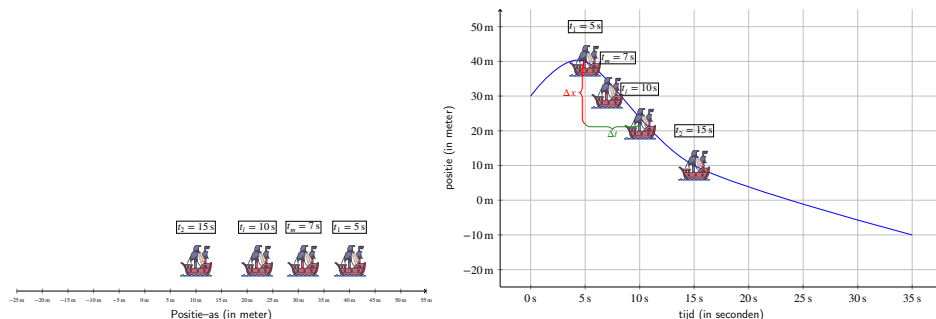
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 \text{ m} - 40 \text{ m}}{15 \text{ s} - 5 \text{ s}} = \frac{-30 \text{ m}}{10 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}$$



Figuur 21: De gemiddelde snelheid voor $t_1 = 5$ en $t_2 = 15$

Indien niet met $t_2 = 15 \text{ m}$ de gemiddelde snelheid wordt berekend, maar bijvoorbeeld met $t_1 = 10 \text{ s}$, zal deze gemiddelde snelheid vermoedelijk beter de ogenblikkelijke snelheid op t_1 benaderen.

Op de plaatsgrafiek schuift de zeilboot naar t_1 . De gemiddelde snelheid $\bar{v} = \frac{x_l - x_1}{t_l - t_1}$ is vermoedelijk een *beter* benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_1 . Maar het is nog steeds een gemiddelde snelheid! Door de gemiddelde snelheid te berekenen voor $t_m = 7$ wordt de benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_1 nog beter... Op de grafiek komen de twee schepen nu wel erg dicht bij elkaar...



Figuur 22: De gemiddelde snelheid voor $t_1 = 5$ en $t_l = 10$

De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner... te nemen. De ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de **limiet van de gemiddelde snelheid** over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

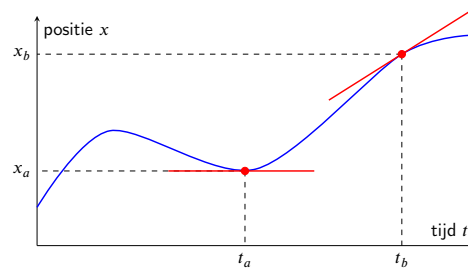
Definitie 2.4.2. De **ogenblikkelijke snelheid** in één dimensie is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid v .

Grafisch kan je de afgeleide interpreteren als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

2.4 De snelheid

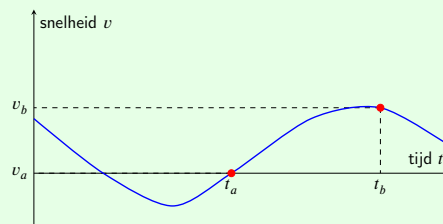


Figuur 23: De snelheid als richtingscoëfficiënt aan de raaklijn

Definitie 2.4.3. De snelheidsfunctie $v(t)$ geeft de component van de snelheid in functie van de tijd. De snelheid op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$v_a = v(t_a).$$

In een grafiek van de functie wordt op de horizontale as de tijd weergegeven en op de verticale de snelheidscomponent.



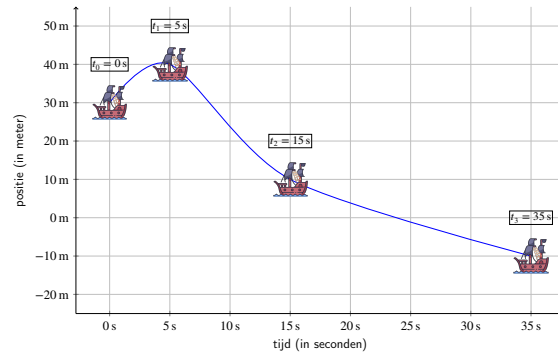
Figuur 24: Een snelheidsfunctie voor een ééndimensionale beweging.

Opmerking 2.4.1. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds de ogenblikkelijke snelheid.

Oefening 2.4.1. Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van de zeilboot. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:

1. Waar is de snelheid 0?
2. Waar heeft de zeilboot een positieve snelheid?
3. Waar is de snelheid negatief?
4. Op welk moment beweegt de zeilboot het snelst?

2.4 De snelheid



Figuur 25: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging op in loodrechte x- en y-componenten. Op die manier bekomt men gelijkaardige formules zoals in het 1D geval.

Definitie 2.4.4. De **snelheidsvector** $\vec{v}$ van een lichaam wordt gedefinieerd als de afgeleide van de plaatsvector naar de tijd:

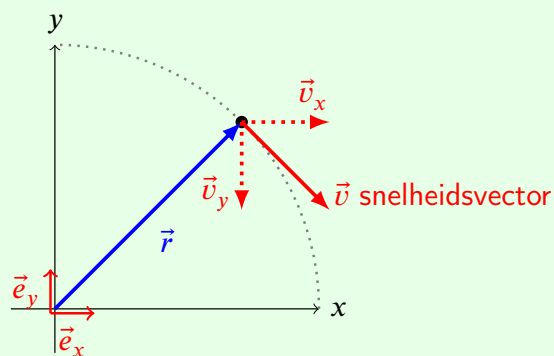
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

en kan worden opgesplitst in snelheidscomponenten v_x en v_y :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y$$

De grootte van de totale snelheid wordt genoteerd met het symbool v en is gelijk aan

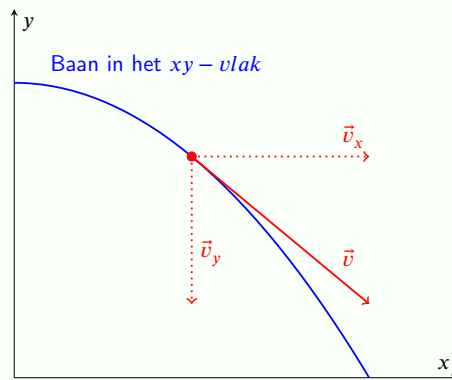
$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Figuur 26: De snelheidsvector $\vec{v}$

Stelling 2.4.1. De snelheidsvector is altijd rakend aan de baan.

2.4 De snelheid



Figuur 27: De snelheidsvector is rakend aan de baan.

Bewijs ➤

We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\frac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\frac{v_y}{v_x}$. ■

2.5 De versnelling

2.5 De versnelling

Wanneer de snelheid van een voorwerp verandert in de tijd, heeft het een *versnelling*. Een synoniem voor het woord versnelling is *acceleratie*, dat het symbool $\vec{a}$ van deze grootheid verklaart. Acceleratie is soms handiger om te gebruiken, dat vermijdt verwarring met het begrip snelheid, wat helemaal niet hetzelfde is!

$\vec{v}$ = velocity = vitesse = snelheid

$\vec{a}$ = acceleration = acceleratie = versnelling = snelheidsverandering

De vector $\vec{a}$ grijpt aan op het versnellend voorwerp en beschrijft de bewegingsverandering.

Definitie 2.5.1. De gemiddelde versnelling $\vec{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefinieerd als

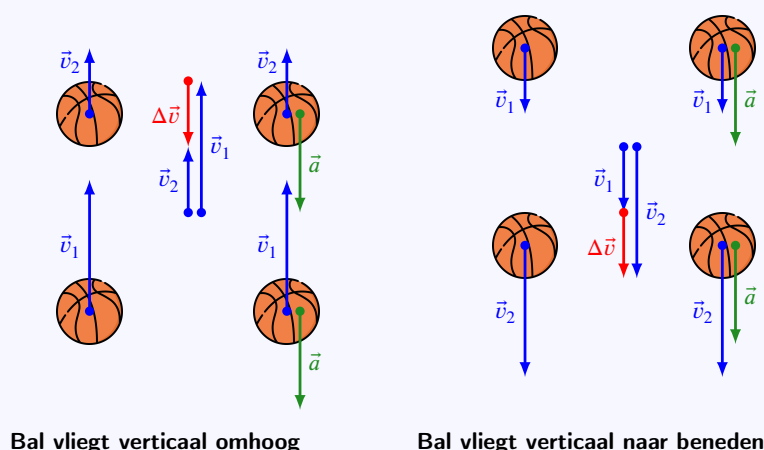
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \text{m/s}^2$.

Als de snelheid van een voorwerp wijzigt, dan wijzigt ook de snelheidsvector. Afhankelijk van welk kenmerk van de snelheidsvector (en dus ook van de beweging) verandert, maakt men een onderscheid tussen twee verschillende soorten versnellingen:

Definitie 2.5.2. (Werkdefinitie). Als enkel de *grootte* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **tangentiële versnelling** $\vec{a}_t$. In dit geval is de versnellingsvector tangentieel of evenwijdig met de snelheidsvector. Dit komt voor bij eendimensionale bewegingen. Hierbij blijft de richting van de beweging onveranderd.

Voorbeeld 2.5.1. Een verticaal omhoog geworpen basketbal versnelt tangentieel, de bal gaat eerst trager en trager en na het hoogste punt sneller en sneller. Enkel de grootte van de snelheid verandert. De richting niet, want de bal blijft verticaal bewegen. De versnellingsvector staat evenwijdig met de snelheidsvector, dit volgt uit de constructie van $\Delta \vec{v}$. Wegens de definitie van de gemiddelde versnelling staan $\vec{a}$ en $\Delta \vec{v}$ in deze situatie in dezelfde richting en zin.



Figuur 28: Snelheid en versnelling bij een verticale worp

2.5 De versnelling

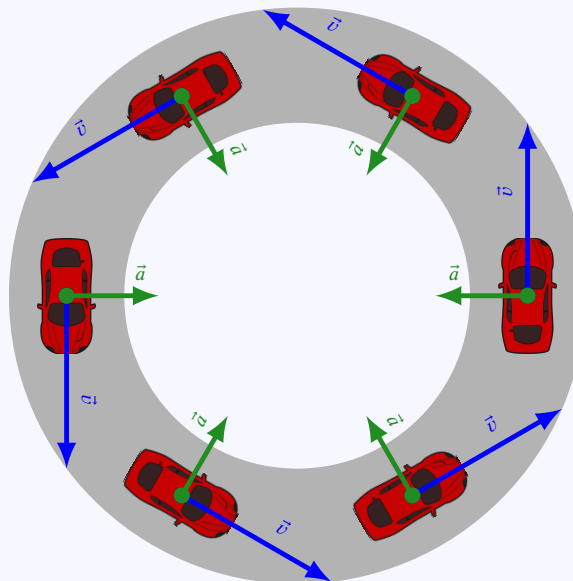
Voorbeeld 2.5.2. Een auto trekt op een rechte weg op met een versnelling van 3 m/s^2 . Dit wil zeggen dat per seconde de grootte van zijn snelheid met 3 m s^{-1} verandert (of in dit geval toeneemt).

Oefening 2.5.1.

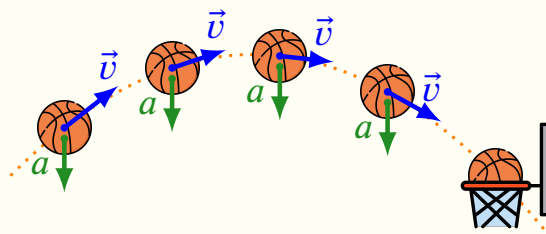
1. Als een basketbal botst op de grond verandert de snelheidsvector ook van *zin*. Maak een tekening met vectoren net voor en na de bots.
2. Waarom is dit een tangentiële versnelling?

Definitie 2.5.3. (Werkdefinitie). Als enkel de *richting* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **normale versnelling** $\vec{a}_n$. In dit geval staat de versnellingsvector normaal of loodrecht op de snelheidsvector. Dit komt voor bij tweedimensionale cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid onveranderd blijft.

Voorbeeld 2.5.3. De auto in onderstaande afbeeldingen rijdt op een rotonde. De grootte van de snelheid is constant, maar de richting van de snelheid wijzigt. De auto ondergaat een normale versnelling.



Opmerking 2.5.1. Een combinatie van de twee types versnelling is ook mogelijk, bijvoorbeeld bij een schuin geworpen basketbal. Ze worden dan gegeven door de vectorcomponenten van de versnelling volgens de snelheid en loodrecht op de snelheid.



2.5 De versnelling

Gemiddelde versnelling bij eendimensionale bewegingen

Definitie 2.5.4. Bij eendimensionale bewegingen wordt de gemiddelde versnelling $\bar{a}$ gedefinieerd als

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Ogenblikkelijke versnelling bij eendimensionale bewegingen

De gemiddelde versnelling $\bar{a}$ geeft de verandering in snelheid *tussen* twee tijdstippen t_1 en t_2 . Om de ogenblikkelijke versnelling a op één tijdstip t te bepalen wordt – net zoals bij de ogenblikkelijke snelheid – gebruik gemaakt van de afgeleide.

Definitie 2.5.5. De ogenblikkelijke versnelling wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

$$a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de versnelling geeft.

Ogenblikkelijke versnelling bij tweedimensionale bewegingen

In twee dimensies kan de snelheid naast een verandering van grootte ook een verandering van richting hebben. Om die te beschrijven is een vector het aangewezen object.

Definitie 2.5.6. De **versnellingsvector** $\vec{a}$ van een lichaam wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsvector naar de tijd:

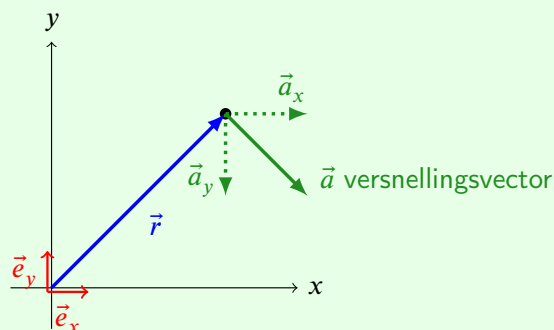
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt},$$

en kan worden opgesplitst in versnellingscomponenten a_x en a_y :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{e}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

De grootte van de versnelling wordt genoteerd met het symbool a en is gelijk aan

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



Figuur 29: Een versnellingsvector $\vec{a}$

2.5 De versnelling

Opmerking 2.5.2. Het begrip versnelling in de fysica heeft niet altijd dezelfde betekenis als in de volksmond.

In de volksmond:

versnelling = vergroten van snelheid

vertraging = verkleinen van de snelheid

bocht maken = richtingsverandering van de snelheid

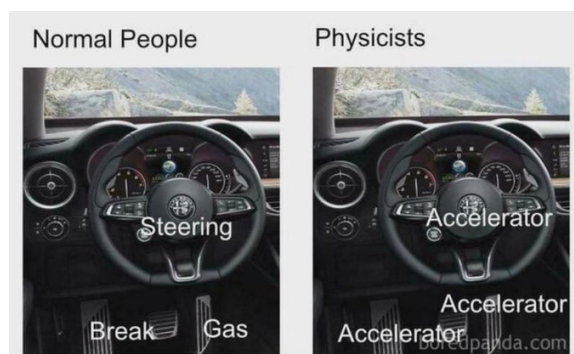
In de fysica:

versnelling = verandering van snelheid in eender welk opzicht

De versnelling in de fysica is de grootte $\vec{a}$ zoals die hierboven gedefinieerd is. We spreken van een vertraging wanneer de grootte van de snelheid afneemt. Dat kan voorkomen wanneer de snelheid (wat een vector is) en de versnelling (wat dus ook een vector is) een tegengestelde zin hebben. Hebben ze dezelfde zin, dan versnelt het voorwerp.

Opmerking 2.5.3. Wagens en fietsen hebben ook versnellingen. Weet dat deze versnellingen nauwelijks iets te maken hebben met het fysisch begrip versnelling. Een auto die in derde versnelling met een constante snelheid van 50 km/h rechtdoor rijdt, versnelt bijvoorbeeld helemaal niet. Zijn versnelling is 0 m/s². Een juistere naam om de standen van de versnellingspook of de ketting weer te geven had eigenlijk "snelheid" geweest omdat de versnelling waarin je rijdt veel meer zegt over welke snelheid je hebt. Kleine versnellingen gebruik je voor kleine snelheden en grote versnellingen voor grote snelheden. Onze Franstalige zuiderburen hebben daar een logischere naam voor, namelijk: "vitesse" (= snelheid). Probeer dus de begrippen snelheid en versnelling niet door elkaar te gooien, want ze hebben een heel andere betekenis! Het is alsof je zou zeggen dat positie en snelheid hetzelfde is!

Oefening 2.5.2. Verklaar onderstaande meme.



2.6 Oefeningen kinematica

2.6 Oefeningen kinematica

Oefening 2.6.1. Kan de snelheid van een voorwerp gelijk zijn aan nul, terwijl de versnelling verschillend is van nul? Motiveer je antwoord.

Oefening 2.6.2. Kan een voorwerp dat een positieve versnelling heeft een negatieve snelheid hebben? Kan het omgekeerde ook? Licht je antwoord toe.

Oefening 2.6.3. Een puntmassa beweegt volgens de plaatsfunctie

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 10t$$

Bereken haar snelheidscomponent telkens als ze het vertrekpunt passeert. Hoe groot is dan de versnellingscomponent?

Oefening 2.6.4. Een veerman tracht een stromende rivier loodrecht over te roeien. Hij slaagt erin ten opzichte van het water een snelheid van 2,00 m/s te ontwikkelen – de stroomsnelheid is 1,25 m/s. De rivier is 150 m breed.

1. Onder welke hoek ten opzichte van de loodlijn op de oever moet hij steeds blijven roeien?
2. Hoeveel tijd heeft de veerman nodig om de overzijde te bereiken?

Oefening 2.6.5. De coördinaten van een deeltje worden als functie van de tijd gegeven door

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Meerkeuze:

- | | |
|---|---|
| (a) Dan is de versnelling steeds evenwijdig aan de x -as. | (c) Dan maakt de versnelling steeds een hoek van 45° met de x -as. |
| (b) Dan is de versnelling steeds evenwijdig aan de y -as. | (d) Dan wordt het deeltje niet versneld |

Oefening 2.6.6. De positie van een deeltje als functie van de tijd wordt beschreven door

$$\vec{r} = bt\vec{e}_x + (c - dt^2)\vec{e}_y$$

met $b = 2,00 \text{ m s}^{-1}$, $c = 5,00 \text{ m}$ en $d = 1,00 \text{ m s}^{-2}$.

1. Druk y uit in functie van x . Hoe ziet de baan eruit?
2. Bepaal de snelheidsvector.
3. Op welk tijdstip ($t > 0$) staat de snelheid loodrecht op de plaatsvector?

Oefening 2.6.7. Een voorwerp maakt een beweging met volgende plaatscoördinaten:

$$x = 8t^3, \quad y = t^6 - 2,$$

met x, y in m en t in s.

2.6 Oefeningen kinematica

1. Bepaal de verplaatsing tussen $t = 0$ s en $t = 1$ s.
2. Bepaal de snelheidsvector en de versnellingsvector op tijdstip $t = 1$ s.
3. Is er op $t = 1$ s een tangentiële versnelling, een normale versnelling, of beide?
4. Bepaal de baanvergelijking van de baan van het voorwerp.

Oefening 2.6.8. Vergelijk de begrippen *verplaatsing* en *afgelegde weg* met elkaar. Geef dus enkele gelijkenissen en enkele verschillen.

Oefening 2.6.9. De plaatsvector van een deeltje wordt (voor $t \geq 0$) gegeven door

$$\vec{r} = -t\vec{e}_x + (t-1)^2\vec{e}_y$$

- (a) Geef de baanvergelijking.
- (b) Wanneer is één van de snelheidscomponenten nul?
- (c) Hoe groot is dan de snelheid?
- (d) Waar is het deeltje dan?
- (e) Geef de versnellingsvector.
- (f) Raakt de versnellingsvector aan de baan? Licht toe.

Oefening 2.6.10. De coördinaten van een puntmassa veranderen als volgt:

$$x(t) = 3t^2 \quad y(t) = 2t^4$$

- (a) Bepaal de positie van het voorwerp na 2,0 s.
- (b) Bepaal de vergelijking van de baan van het deeltje.
- (c) Op welk ogenblik bedraagt de grootte van de snelheid 10 m/s?
- (d) Teken de snelheidsvector op de baan op dat ogenblik. Welke hoek maakt ze met de x -as?

Oefening 2.6.11. De beweging van een voorwerp wordt beschreven door volgende coördinaatfuncties:

$$x(t) = 5t + 3 \quad y(t) = -4t^2 + t$$

- (a) Geef de verplaatsing tussen 2,0 s en 4,0 s en bereken haar grootte.
- (b) Geef de ogenblikkelijke snelheid op 2,0 s.
- (c) Geef de baanvergelijking.

Oefening 2.6.12. Als $a_x = 0$, wat weet je dan over de snelheid?