

NATUURKUNDE 6DE JAAR

KINEMATICA: TWEEDIMENSIONALE BEWEGINGEN

Inhoudsopgave

4	Tweedimensionale bewegingen	4.1
4.1	Inleiding	4.1
4.2	Het onafhankelijkheidsbeginsel	4.2
4.3	De horizontale worp	4.3
4.4	De eenparig cirkelvormige beweging	4.5
4.4.1	Enkele begrippen	4.5
4.4.2	Kinematica van de cirkelbeweging	4.6
4.5	Oefeningen tweedimensionale bewegingen	4.9

4.1 Inleiding

4.1 Inleiding

Als we in een vlak bewegen, hebben we te maken met een tweedimensionale beweging. Ten opzichte van een referentiestelsel met twee assen, kunnen we de beweging beschrijven.



Figuur 1: Sterrentrajecten aan de hemel

We behandelen twee concrete bewegingen in dit hoofdstuk, de horizontale worp en de eenparig cirkelvormige beweging.

4.2 Het onafhankelijkheidsbeginsel

4.2 Het onafhankelijkheidsbeginsel

Om even over na te denken ...

In onderstaand filmpje wordt een bal verticaal opgeworpen vanuit de laadbak van een horizontaal bewegende pick up truck. Heeft de horizontale beweging van de bal een invloed op de verticale beweging van de bal?

YouTube link: <https://www.youtube.com/watch?v=j1URC2G2qnc>



Definitie 4.2.1. Het **onafhankelijkheidsbeginsel** stelt dat een beweging in een bepaalde richting geen invloed heeft op de beweging in een andere richting.

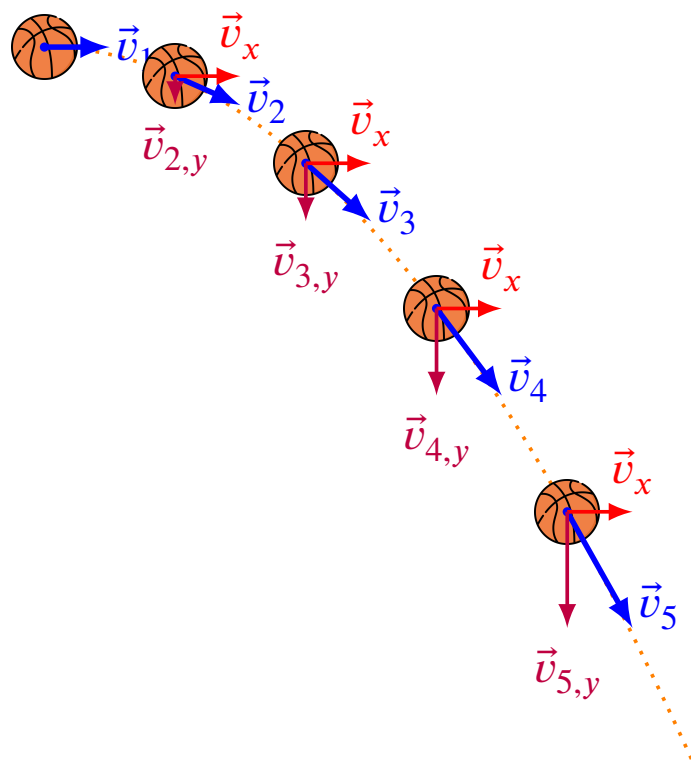
Als gevolg kunnen we een tweedimensionale beweging beschrijven als een samenstelling van een horizontale en een verticale beweging, onafhankelijk van elkaar.

4.3 De horizontale worp

4.3 De horizontale worp

Wanneer een object horizontaal met een bepaalde beginsnelheid wordt gekatapulteerd, noemen we die beweging een horizontale worp.

Wij beschouwen de worp in het luchtledige.



Figuur 2: De snelheid in horizontale richting verandert niet, die in de verticale richting neemt lineair toe in de tijd

In de beschrijving kunnen we de x -as horizontaal en de y -as verticaal naar beneden nemen. Omdat er volgens de x -as geen versnelling is het lichaam volgens de y -as valt met de valversnelling g , kunnen we de formules voor een ERB en een EVRB op de afzonderlijke assen toepassen en zo de volledige beweging beschrijven.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

De baanvergelijking vinden we zoals eerder vermeld, door t in functie van x te schrijven $x = v_0 t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0}$ en dit in $y(t)$ te substitueren:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

De baan is dus (een stuk van) een parabool.

Voorbeeld 4.3.1. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 450 km/h op een hoogte van 920 m.

1. Hoever voor het doel moeten de voedselpakketten gelost worden om op het doel terecht te komen?

Uitwerking: De afstand waarover de voedselpakketten in horizontale richting zijn vooruit gegaan, kunnen

4.3 De horizontale worp

we vinden met de baanvergelijking. We weten namelijk hoever de pakketten naar beneden zijn gevallen en wat hun beginsnelheid is:

$$\begin{aligned}y &= \frac{g}{2v_0^2}x^2 \\ \Downarrow \\ x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}} = 1712 \text{ m}\end{aligned}$$

2. Hoeveel tijd hebben de pakketten nodig om het doel te bereiken?

Uitwerking: De valtijd voor de pakketten vinden we o.a. door naar de verticale valbeweging te kijken. Deze gebeurt onafhankelijk van wat er in de horizontale richting gebeurt, zodat:

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}gt^2 \\ \Downarrow \\ t &= \sqrt{\frac{2y}{g}} = 13,7 \text{ s}\end{aligned}$$

4.4 De eenparig cirkelvormige beweging

4.4 De eenparig cirkelvormige beweging

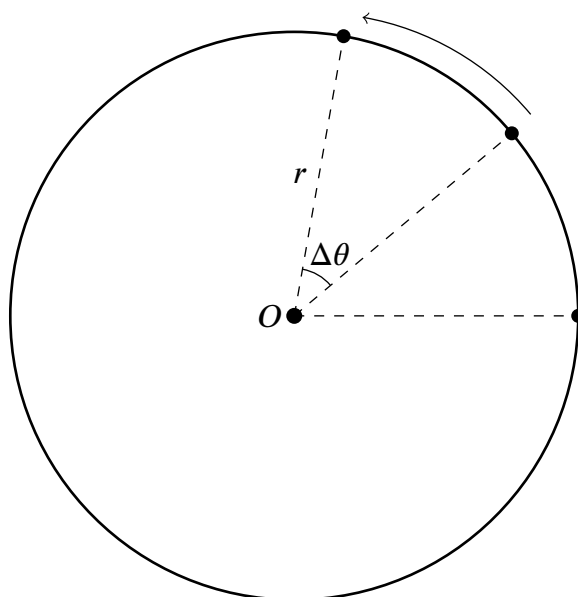
De cirkelbeweging is op het eerste zicht misschien een zeer eenvoudige beweging maar wel alom tegenwoordig. Denk maar aan een kermisattractie zoals een carrousel, wielen, planeetbanen of aan het nemen van een bocht met de auto of de fiets. Vandaar dat het een toch een zeer belangrijke beweging is. Wij bestuderen een eenparige cirkelvormige beweging (ECB). Dat betekent dat de baan van het object een cirkel is en dat de grootte van de snelheid waarmee de baan wordt doorlopen, constant is.

4.4.1 Enkele begrippen

Om een cirkelbeweging te beschrijven, hebben we enkele begrippen nodig die je eventueel nog onbekend zijn. Zo is er de *frequentie*. Het is algemeen het aantal cyclussen van een periodieke beweging die per seconde worden doorlopen. Specifiek voor de cirkelbeweging is de frequentie dan het aantal keren dat de cirkel doorlopen wordt per tijdseenheid. De frequentie krijgt het symbool f en heeft als eenheid de Hertz, $[f] = \text{Hz} = \text{s}^{-1}$. Het begrip *periode* gebruiken we voor de tijdsduur die nodig is voor het doorlopen van één cyclus. Het symbool is T en de eenheid seconde, $[T] = \text{s}$. Het aantal cyclussen dat in de periode wordt doorlopen is één zodat de volgende relatie tussen de frequentie en de periode bestaat.

$$f = \frac{1}{T}$$

Als laatste hebben we nog het begrip *hoeksnelheid*.



Verschillende punten op je fietswiel hebben verschillende snelheden als hun afstand tot het centrum verschilt. Het ventieldopje moet immers in eenzelfde tijd meer afstand afleggen dan een reflector op een spaak. Toch bestaat het wiel uit één geheel. Als je naar de omwentelingshoek kijkt die een straal door een punt op het wiel maakt, dan is die voor alle punten gelijk. Daarom definiëren we de hoeksnelheid ω als de verandering van de omwentelingshoek tot de benodigde tijd.¹

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

De eenheid is radialen per seconde, $[\omega] = \text{rad/s}$. Aangezien een volledige omwentelingshoek 2π bedraagt en de tijd nodig om rond te gaan de periode is, geldt

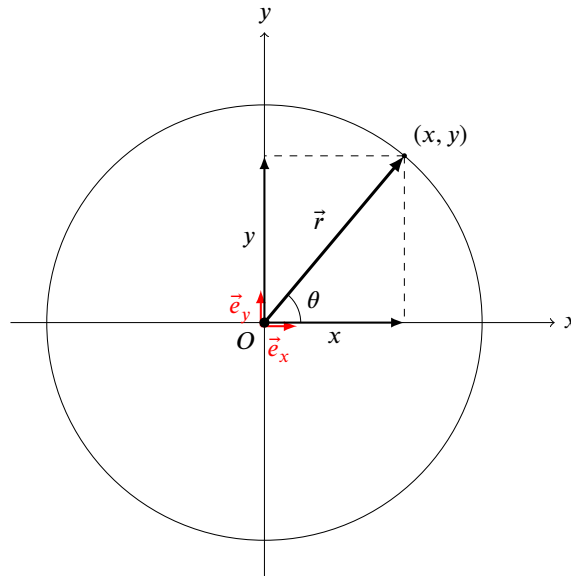
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1)$$

¹De letter ω is de kleine letter van Ω en de laatste letter in het Griekse alfabet. Spreek ω uit als omega. Een ω is geen w , zoals ook een w geen ω is. O wee (ω ?) als je je op het examen in juni vergist ...

4.4 De eenparig cirkelvormige beweging

4.4.2 Kinematica van de cirkelbeweging

We beschouwen een punt dat een cirkelbeweging maakt met straal r . We voeren een assenstelsel in met de oorsprong in het middelpunt van de cirkel.



Als we de omwentelingshoek θ meten vanaf de positieve x -as en en het tijdstip $t_0 = 0$ nemen, kunnen we de doorlopen omwentelingshoek als volgt in functie van de tijd schrijven.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

Als we $t_0 = 0$ nemen, komt θ_0 overeen met de starthoek. De formule herschrijven geeft dan voor de ECB een gelijkaardige formule als voor de eenparige rechtlijnige beweging (ERB).

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Voor de eenvoud nemen we meestal $\theta_0 = 0$ zodat $\theta = \omega t$.

De coördinaatfuncties vinden we dan als projecties op de x - en y -as.

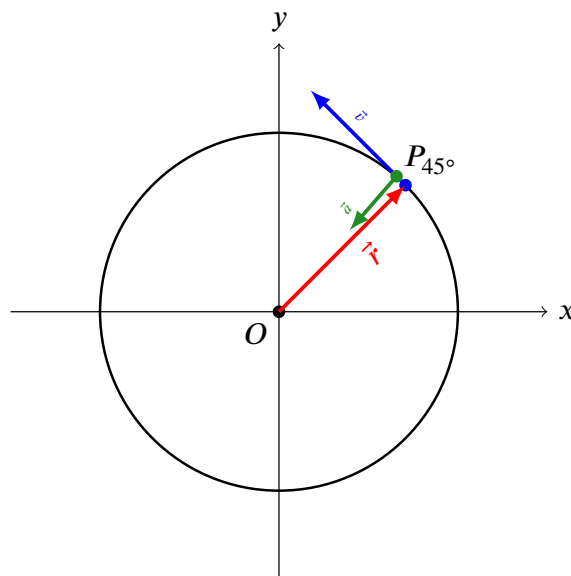
$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \omega t \\ y(t) &= r \sin \omega t \end{aligned}$$

4.4 De eenparig cirkelvormige beweging

We krijgen dan voor de plaatsvector, de snelheid en de versnelling:

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= r \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + r \sin \omega t \cdot \vec{e}_y \\
 \Downarrow \quad \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t \end{cases} \\
 \vec{v} &= -\omega r \sin \omega t \cdot \vec{e}_x + \omega r \cos \omega t \cdot \vec{e}_y \\
 \Downarrow \quad \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r \cos \omega t \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r \sin \omega t \end{cases} \\
 \vec{a} &= -\omega^2 r \cos \omega t \cdot \vec{e}_x - \omega^2 r \sin \omega t \cdot \vec{e}_y \\
 &= -\omega^2 (r \cos \omega t \cdot \vec{e}_x + r \sin \omega t \cdot \vec{e}_y) \\
 &\Downarrow \\
 \vec{a} &= -\omega^2 \vec{r} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Deze laatste gelijkheid is zeer belangrijk. We vinden dat de versnelling steeds naar het middelpunt van de cirkel is geïënteerd ...! We noemen het bijgevolg een centripetale² of middelpuntzoekende versnelling.



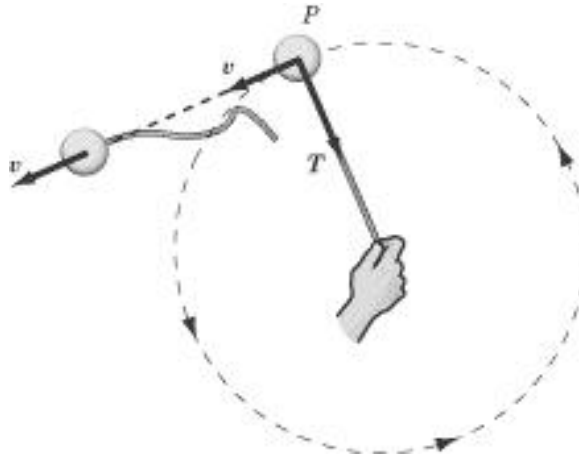
Je zou dit resultaat opmerkelijk kunnen noemen aangezien de snelheid een constante grootte heeft. Maar tegelijk ook niet omdat we hier te maken hebben met een richtingsveranderende versnelling, de normale versnelling uit het hoofdstuk basisbegrippen.

$$\begin{aligned}
 v = \|\vec{v}\| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
 &= \sqrt{(-\omega r \sin \omega t)^2 + (\omega r \cos \omega t)^2} \\
 &= \sqrt{r^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\
 &\Downarrow \\
 v &= r\omega \tag{3}
 \end{aligned}$$

²Dit is niet hetzelfde als centrifugaal.

4.4 De eenparig cirkelvormige beweging

Verandert de richting van de snelheid en aangezien versnelling de verandering van de snelheid is, moet er een versnelling zijn. Deze is naar het centrum geïënteerd omdat een fractie van een seconde later het object – in vergelijking met de rechte baan die het zou afleggen moest het volgens de snelheid die het op een bepaald moment heeft, voortbewegen – iets dichtër naar het centrum moet zijn gekomen. De snelheidsvector is in grootte niet veranderd maar wel gedraaid, in de richting van het centrum. Moest bovendien de versnelling niet loodrecht op de snelheid staan, dan zou de versnelling een component volgens de snelheid hebben wat zou betekenen dat de snelheid in die richting zou moeten veranderen van grootte.



Toelichting figuur: Moest er geen versnelling naar het centrum zijn – bv. in het geval dat een touwtje met een ronddraaiend object aan, knapt – dan zou de snelheid niet veranderen en het object op een rechte baan in het verlengde van de snelheid met een constante snelheid voortbewegen.

Uit (1), (2) en (3) vinden we nog:

$$a = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r} \quad (4)$$

Merk op dat de snelheid een kwadratische invloed op de grootte van de versnelling heeft.

4.5 Oefeningen tweedimensionale bewegingen

4.5 Oefeningen tweedimensionale bewegingen

Oefening 4.5.1. Welk punt heeft de grootste versnelling: een punt op de buitenrand van een rond-draaiende cd, of een punt op de helft van de straal van een cd die met een tweemaal zo grote hoeksnelheid ronddraait? Toon je antwoord aan.

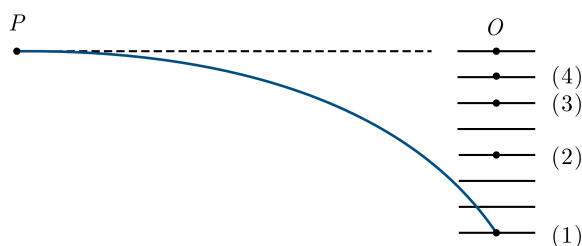
Oefening 4.5.2. Een bal wordt in een horizontale richting van de rand van een rotswand gegooid, met beginsnelheid v_0 . De hoek die de bewegingsrichting van de bal op een willekeurig moment met de horizontaal maakt, noemen we θ . Leid een formule af die voor de periode dat de bal onderweg is de hoek θ als functie van t geeft.

Oefening 4.5.3. Een tennisspeler, die 9,0 m voor het net staat, slaat een bal in horizontale richting met een snelheid van 25 m s^{-1} . Het racket raakt de bal 1,8 m boven de grond. De bovenkant van het net is 1,0 m boven de grond. Vliegt de bal over het net, of er tegenaan?

Oefening 4.5.4. Een pijl, die horizontaal wordt afgeschoten in het punt P treft een verticale wand in punt (1). Verdubbelt men de vertreksnelheid van de pijl in het punt P , dan zal de pijl dezelfde wand treffen:

Meerkeuze:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (a) in het punt (1) | (c) in het punt (3) |
| (b) in het punt (2) | (d) in het punt (4) |



Oefening 4.5.5. Een puntmassa beschrijft een cirkel met een straal van 5,0 cm en een periode van 0,33 s. Welke afstand op de cirkel legt deze puntmassa in 7,0 s af?

Oefening 4.5.6. Bereken de hoeksnelheid van de aarde om haar as. Bereken de snelheid van een punt van het aardoppervlak:

- (a) aan de evenaar,
(b) op 51° noorderbreedte.

Oefening 4.5.7. Een auto rijdt door een bocht met een constante snelheid van 50 km h^{-1} . Heeft de auto een andere versnelling wanneer hij diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 70 km h^{-1} ? Licht je antwoord toe.

Oefening 4.5.8. Als een auto met 60 km h^{-1} een scherpe bocht neemt, en daarna met dezelfde snelheid een flauwe bocht, is de versnelling dan in beide gevallen gelijk? Leg uit.

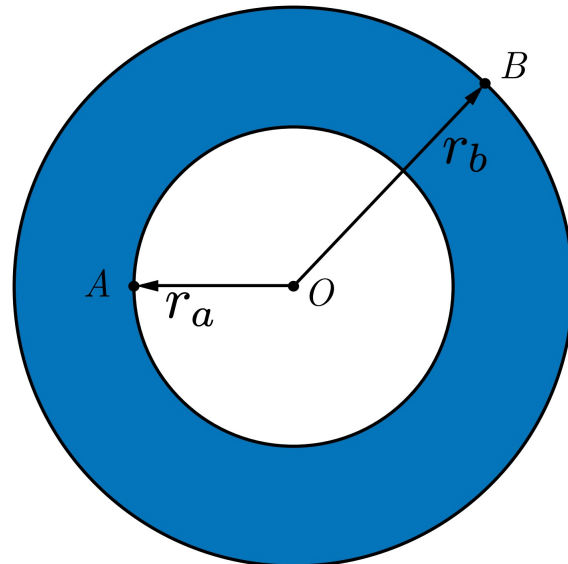
Oefening 4.5.9. Tijdens het trainen van een ruimtevaarder wordt deze in een cirkelvormige beweging gebracht met een zetel, die zich aan het uiteinde van een horizontale arm van 5,00 m lengte bevindt. Indien hij versnellingen tot $10g$ kan verdragen, wat is dan de toegelaten maximale snelheid, en het maximale toegelaten toerental?

4.5 Oefeningen tweedimensionale bewegingen

Oefening 4.5.10. Alle punten van een ring voeren een eenparige cirkelbeweging uit. De grootte van de snelheid in punt A is v_a en in punt B , v_b . Dan is

Meerkeuze:

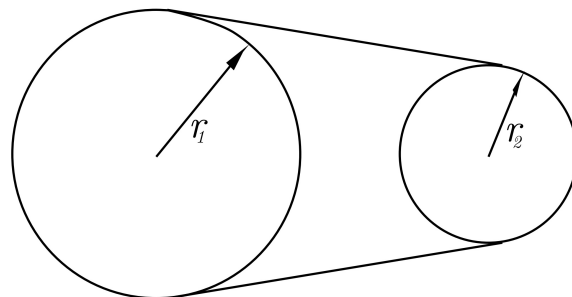
- (a) $v_a r_a = v_b r_b$ (c) $v_a v_b = r_a r_b$
 (b) $v_b r_a = v_a r_b$ (d) $v_a = v_b$



Oefening 4.5.11. Bij een fiets zijn het grootste en het kleinste kamwiel door middel van een ketting met elkaar verbonden. Tussen de hoeksnelheid ω_1 van het grootste kamwiel en ω_2 van het kleinste kamwiel bestaat de volgende relatie:

Meerkeuze:

- (a) $\omega_1 = \omega_2$ (c) $r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$
 (b) $r_1 \omega_2 = r_2 \omega_1$ (d) $r_1 r_2 = \omega_1 \omega_2$



Oefening 4.5.12. Een auto rijdt door een brugleuning en komt 5,2 m lager in het water terecht. De horizontale afstand tussen de plaats waar hij door de leuning ging en waar hij in het water terechtkwam, is 22 m. Kan de politie hieruit afleiden met welke snelheid hij ongeveer reed? Was zijn werkelijke snelheid groter of kleiner?

Oefening 4.5.13. Een kogel wordt met een snelheid van 800 m s^{-1} horizontaal afgeschoten op een doel dat zich op een horizontale afstand van 100 m bevindt. Over welke afstand is de kogel afgezaakt?

Oefening 4.5.14. Een vliegwiel doet 450 omwentelingen per minuut. Zoek de hoeksnelheid van het wiel en de snelheid van een punt op 1,70 m van het middelpunt.

Oefening 4.5.15. In een bocht met straal 160 m verlaagt een autorenner zijn snelheid eenparig van 90 m s^{-1} tot 75 m s^{-1} in 2 s. Bereken de grootte van de versnelling van de wagen op het ogenblik dat de snelheid 80 m s^{-1} .

4.5 Oefeningen tweedimensionale bewegingen

Meerkeuze:

(a) $40,7 \text{ m s}^{-2}$

(c) 15 m s^{-2}

(b) 40 m s^{-2}

(d) $7,5 \text{ m s}^{-2}$

Oefening 4.5.16. In de figuur is de versnelling en de snelheid van een puntmassa gegeven op een bepaald tijdstip. De grootte van de versnelling is $15,0 \text{ m s}^{-2}$ en de vector maakt een hoek van 30° met de straal van de cirkel. De straal van de cirkel is $2,50 \text{ m}$. Bepaal de grootte van de normaalversnelling, de grootte van de tangentiële versnelling en de grootte van de baansnelheid.