

---

# Rekenvaardigheden

---

1 november 2025

## Inhoudsopgave

|          |                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Rekenen met breuken</b>                                             | <b>1.1</b> |
| 1.1      | Rekenen met breuken . . . . .                                          | 1.1        |
| 1.2      | Oefeningen breuken . . . . .                                           | 1.3        |
| <br>     |                                                                        |            |
| <b>2</b> | <b>Rekenen met machten</b>                                             | <b>2.1</b> |
| 2.1      | Rekenen met machten . . . . .                                          | 2.1        |
| 2.2      | Oefeningen machten . . . . .                                           | 2.3        |
| <br>     |                                                                        |            |
| <b>3</b> | <b>Eerstegraadsvergelijkingen</b>                                      | <b>3.1</b> |
| 3.1      | Theorie lineaire vergelijkingen . . . . .                              | 3.1        |
| 3.2      | Oefeningen lineaire vergelijkingen . . . . .                           | 3.4        |
| <br>     |                                                                        |            |
| <b>4</b> | <b>Kwadratische vergelijkingen</b>                                     | <b>4.1</b> |
| 4.1      | Kwadratische vergelijkingen oplossen . . . . .                         | 4.1        |
| <br>     |                                                                        |            |
| <b>5</b> | <b>Complexe getallen</b>                                               | <b>5.1</b> |
| 5.1      | Kwadratische vergelijkingen oplossen in de complexe getallen . . . . . | 5.1        |
| 5.2      | Complexe getallen voorstellen in het complexe vlak . . . . .           | 5.2        |
| <br>     |                                                                        |            |
| <b>6</b> | <b>Doordacht Rekenen</b>                                               | <b>6.1</b> |
| 6.1      | oefening . . . . .                                                     | 6.1        |

## 1.1 Rekenen met breuken

## 1.1 Rekenen met breuken

Deze pagina geeft een overzicht van de rekenregels voor breuken. De focus ligt op rekenvaardigheid. Voor meer nauwkeurige en theoretische bespreking verwijzen we door naar een handboek.

**Definitie 1.1.1.**

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm  $\frac{a}{b}$ , met  $a, b \in \mathbb{R}$  en  $b \neq 0$ .

We noemen  $a$  de **teller** en  $b$  de **noemer**. Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \iff \boxed{ad = bc} \quad \text{gelijkheid van breuken}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{optelling}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{vermenigvuldiging}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{deling}$$

Uit deze definities volgen enkele belangrijke rekenregels:

**Eigenschap 1.1.1.**

$$\frac{a \cdot c}{a \cdot d} = \frac{\cancel{a} \cdot c}{\cancel{a} \cdot d} = \frac{c}{d} \quad (\text{gemeenschappelijke factor } a \text{ wegdelen})$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{a \cdot d} \quad (\text{met factor } a \text{ vermenigvuldigen})$$

$$a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d} \quad (\text{getal maal breuk})$$

$$\frac{a \cdot c}{d} = a \cdot \frac{c}{d} \quad (\text{factor uit teller halen})$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \quad (\text{breuken optellen, gelijke noemers})$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \quad (\text{som in teller splitsen})$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (\text{breuk gedeeld door breuk is maal omgekeerde})$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \quad (\text{gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen})$$

## 1.1 Rekenen met breuken

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \quad (\text{breuk gedeeld door getal is maal in noemer})$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c} \quad (\text{getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde})$$

Er zijn ook enkele minder voor de hand liggende operaties mogelijk die in oefeningen vaak handig blijken:

**Eigenschap 1.1.2.** Je kan altijd

$$a + c = d \cdot \left( \frac{a}{d} + \frac{c}{d} \right) \quad \text{een niet bestaande factor buiten haakjes brengen.}$$

$$a = \frac{a}{1} = \frac{1}{\frac{1}{a}} \quad \text{van 'geen breuk' toch een breuk maken.}$$

$$a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}} \quad \text{van een product een breuk maken.}$$

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{van een breuk een product maken.}$$

Bij het rekenen met breuken zijn er enkele foutieve operaties die voor leerlingen soms erg aantrekkelijk zijn. Doe jezelf (en je leerkracht...) een plezier en overtuig jezelf dat de volgende uitdrukkingen verkeerd zijn.

**Opmerking 1.1.1.** In het algemeen geldt niet:

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{a+1} \neq \frac{a}{a+1} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

**Oefening 1.1.1.** Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Veronderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

$$1. \quad \frac{x-2}{2} - \frac{x-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$2. \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

$$3. \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6}$$

$$4. \quad \frac{x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x-1}{3}$$

$$5. \quad \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

$$6. \quad 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$7. \quad x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$8. \quad \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

## 1.2 Oefeningen breuken

## 1.2 Oefeningen breuken

**Oefening 1.2.1.** Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1.  $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Uitwerking:  $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2.  $\frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Uitwerking:  $\frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{4}{18} - \frac{3}{18} = \frac{1}{18}$

3.  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$

Uitwerking:  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{9}{27} - \frac{3}{27} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$

4.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

Uitwerking:  $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

5.  $\frac{15}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$

Uitwerking:  $\frac{15}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$

6.  $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{55}$

Uitwerking:  $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2^1 \cdot 9^1 \cdot 2}{5 \cdot 22_{11} \cdot 9_1} = \frac{2}{55}$

7.  $\frac{6}{5} : \frac{2}{15} = 9$

Uitwerking:  $\frac{6}{5} : \frac{2}{15} = \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{6^3 \cdot 15^3}{5_1 \cdot 2_1} = \frac{9}{1} = 9$

8.  $\frac{12}{25} : \frac{18}{35} = \frac{14}{15}$

Uitwerking:  $\frac{12}{25} : \frac{18}{35} = \frac{12}{25} \cdot \frac{35}{18} = \frac{12^2 \cdot 35^7}{25_5 \cdot 18_3} = \frac{14}{15}$

9.  $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$

Uitwerking:  $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

10.  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Uitwerking:  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2+1}{4}}{\frac{1+2}{6}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{6}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{3} = \frac{3}{2}$

**Oefening 1.2.2.** Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1.  $20 \cdot (\frac{5}{4} - \frac{4}{5}) = 9$

2.  $-\frac{6}{27} + \frac{27}{1} + \frac{16+14}{9} - \frac{3}{14+13} - 3 \cdot 9 = 3$

3.  $-\frac{(1-a)-2}{a+1} = 1 \quad (a \neq -1)$

**Oefening 1.2.3.** Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Veronderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

1.  $\frac{\frac{a-b}{c}}{\frac{a-b}{2c}} = \frac{a}{2c}$

2.  $\frac{\frac{b}{1-\frac{a}{b}}}{1-\frac{a}{b}} = -1$

3.  $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} = -\frac{1}{a}$

4.  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b^2}{bc}$

5.  $a + \frac{a}{1+a} = \frac{2a+a^2}{1+a}$

6.  $1 + \frac{a}{1+a} = \frac{1+2a}{1+a}$

7.  $1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a}$

8.  $a + \frac{1}{1+a} = \frac{1+a+a^2}{1+a}$

9.  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}} = \frac{1+a}{2+a}$

10.  $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}} = \frac{2+a}{3+2a}$

## 2.1 Rekenen met machten

## 2.1 Rekenen met machten

Deze pagina geeft een overzicht van de rekenregels voor machten. De focus ligt op rekenvaardigheid. Voor meer nauwkeurige en theoretische bespreking verwijzen we door naar een handboek.

**Definitie 2.1.1.** (Machtsverheffing)

Voor een natuurlijk getal  $n$  en een reëel getal  $a$  is de  $n$ -**de macht** van  $a$  het getal

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$$

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

Men noemt  $a$  het **grondtal**,  $n$  de **exponent** en  $a^n$  een **macht**.

Negatieve exponenten geven per definitie het omgekeerde van de macht met de positieve exponent:

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$$

Als de exponent 0 is (en het grondtal is niet 0), geldt per definitie dat  $a^0 = 1$ , als  $a \neq 0$ .

De uitdrukkingen  $0^0$  en  $0^{-n}$  zijn *onbepaald* en hebben *geen betekenis*.

**Oefening 2.1.1.** Welke formules zijn waar?

1. Fout ✓  $(-2)^2 = -4$

3. Fout ✓  $2^{-2} = -4$

5. Juist ✓  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

2. Juist ✓  $-2^2 = -4$

4. Juist ✓  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

6. Fout ✓  $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2} = -4$

**Definitie 2.1.2.** (Machtswortels)

Een reëel getal  $b$  is **een vierkantswortel** van een reëel getal  $a$  als

$$a = b^2$$

$$2 \text{ en } -2 \text{ zijn wortels van } 4 \text{ want } 2^2 = 4 \text{ en } (-2)^2 = 4$$

Voor positieve  $a$  noemen we het unieke *positieve* getal  $b$  zodat  $b^2 = a$  **de vierkantswortel**, en die noteren we als  $\sqrt{a}$  of ook als 'a tot de macht een half':

$$\sqrt{a} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{2}} = b \iff b^2 = a \text{ en } b \geq 0$$

$$\sqrt{25} \stackrel{\text{def}}{=} 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$  is dus het unieke *positieve* getal met kwadraat gelijk aan  $a$ .

Meer in het algemeen schrijven we ook  $n$ -de machtswortels als 'tot de macht  $\frac{1}{n}$ ':

$$\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} = b \iff b^n = a$$

$$\sqrt[3]{8} \stackrel{\text{def}}{=} 8^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ want } 2^3 = 8$$

**Oefening 2.1.2.** Welke formules zijn waar?

1. Juist ✓  $\sqrt{4} = 2$

3. Fout ✓  $\sqrt{-4} = -2$

5. Fout ✓  $\sqrt[3]{9} = 3$

2. Juist ✓  $-\sqrt{4} = -2$

4. Juist ✓  $\sqrt[3]{-8} = -2$

6. Juist ✓  $\sqrt[3]{27} = 3$

Uit deze definities volgen enkele belangrijke rekenregels:

## 2.1 Rekenen met machten

### Eigenschap 2.1.1 (Rekenregels machten).

$$(xy)^n = x^n y^n \quad (\text{macht van product})$$

$$(3y)^2 = 3y \cdot 3y = 3 \cdot 3 \cdot y \cdot y = 3^2 y^2 = 9y^2$$

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad (\text{product met gelijk grondtal})$$

$$x^3 x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^{3+2} = x^5$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \quad (\text{macht van macht})$$

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^{3 \cdot 2} = x^6$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (\text{macht van breuk})$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x \cdot x \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$$

Bij het rekenen met breuken zijn er enkele foutieve operaties die voor leerlingen soms erg aantrekkelijk zijn. Doe jezelf (en je leerkracht...) een plezier en overtuig jezelf dat de volgende uitdrukkingen verkeerd zijn.

**Opmerking 2.1.1.** In het algemeen geldt niet:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$x^n + x^m \neq x^{n+m}$$

## 2.2 Oefeningen machten

## 2.2 Oefeningen machten

**Oefening 2.2.1.** Bereken

1.  $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$

2.  $(2^2)^3 = 2^6$

3.  $2^{(2^3)} = 2^8$

4.  $\frac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^3$

5.  $1302^5 \cdot 2^5 = 2604^5$

**Oefening 2.2.2.** Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel  $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$ .

1.  $\frac{\sqrt{a}}{a^5} = a^{-9/2}$

2.  $(x^6 y^8)^{-1/2} = x^{-3} y^{-4}$

3.  $a^4 b \left( \frac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab} \right)^3 = (ab)^4$



## 3.1 Theorie lineaire vergelijkingen

## 3.1 Theorie lineaire vergelijkingen

In de vergelijking  $a = b$  noemt men  $a$  het linkerlid en  $b$  het rechterlid. Het feit dat beide leden gelijk zijn heeft een belangrijk gevolg: **indien we dezelfde operatie uitvoeren aan beide kanten, blijft de gelijkheid geldig.**

$$a = b$$

$$2a = 2b$$

$$2a + 1 = 2b + 1$$

Deze vaststelling laat ons toe om lineaire vergelijkingen op te lossen:

**Eigenschap 3.1.1.** Vergelijkingen van de vorm  $x + a = b$

Een *term* die van kant wisselt, wijzigt van teken

$$\begin{aligned} x + a &= b \\ x + a - a &= b - a \\ x &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 &= 5 \\ x + 2 - 2 &= 5 - 2 \\ x &= 5 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - a &= b \\ x - a + a &= b + a \\ x &= b + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 4 &= 3 \\ x - 4 + 4 &= 3 + 4 \\ x &= 3 + 4 \end{aligned}$$

**Eigenschap 3.1.2.** Vergelijkingen van de vorm  $ax = b$

Een factor die van kant wisselt, draait om

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{b}{a} \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{8}{4} \\ x &= \frac{8}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= b \\ \frac{ax}{a} &= ab \\ x &= ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{8}{4} \\ x &= \frac{8}{4} \end{aligned}$$

**Oefening 3.1.1.**

1.  $x + 5 = 11$

Uitwerking:  $x = 6$

2.  $3x = 6$

Uitwerking:  $x = 2$

3.  $\frac{x}{2} = 7$

Uitwerking:  $x = 14$

4.  $x - 1 = 0$

Uitwerking:  $x = 1$

5.  $3x + 2 = 0$

### 3.1 Theorie lineaire vergelijkingen

Uitwerking:  $x = \frac{-2}{3}$

6.  $7x + 3 = 10$

Uitwerking:  $x = 1$

7.  $x + 1 = 1$

Uitwerking:  $x = 0$

8.  $4x + x = -4$

Uitwerking:  $x = -2$

9.  $3x - 11 = 1$

Uitwerking:  $x = 4$

10.  $2x + 13 = 13$

Uitwerking:  $x = 0$

**Eigenschap 3.1.3.** Vergelijkingen van de vorm  $ax + b = cx + d$

**Alle termen die x bevatten naar 1 lid brengen, daarna x afzonderen**

$$\begin{aligned} ax + b &= cx + d \\ ax - cx &= d - b \\ x(a - c) &= d - b \\ x &= \frac{d - b}{a - c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x + 1 &= x + 4 \\ -2x - x &= 4 - 1 \\ x(-2 - 1) &= 4 - 1 \\ x &= \frac{4 - 1}{-2 - 1} \end{aligned}$$

#### Oefening 3.1.2.

1.  $3x + 2 = 5$

Uitwerking:  $x = 1$

2.  $x + 7 = 2x - 5$

Uitwerking:  $x = 13$

3.  $2x + 2 = 4x + 4$

Uitwerking:  $x = -1$

4.  $x = -3 - 4$

Uitwerking:  $x = -1$

5.  $5x - 3 = 2x + 6$

Uitwerking:  $x = 3$

6.  $4x + 7 = 3x - 2$

Uitwerking:  $x = -9$

7.  $6x - 4 = 2x + 8$

Uitwerking:  $x = 3$

8.  $7x + 5 = 3x + 17$

Uitwerking:  $x = 3$

9.  $8x - 6 = 2x + 12$

Uitwerking:  $x = 3$

10.  $10x + 4 = 6x + 24$

Uitwerking:  $x = 5$

11.  $9x - 3 = 2x + 11$

Uitwerking:  $x = 2$

12.  $12x + 8 = 4x + 24$

Uitwerking:  $x = 2$

**13.**  $5x + 3 = 2x + 12$

**Uitwerking:**  $x = 3$

**14.**  $4x - 7 = 3x + 1$

**Uitwerking:**  $x = 8$

**15.**  $11x + 9 = 5x + 21$

**Uitwerking:**  $x = 2$

**3.2 Oefeningen lineaire vergelijkingen****3.2 Oefeningen lineaire vergelijkingen**

**Oefening 3.2.1.** Los volgende lineaire vergelijking op naar de onbekende  $x$ .

1.  $5x - 3 = 2x + 6$   $x = 3$

2.  $x + 3 = 7$   $x = 4$

3.  $4x + 7 = 3x - 2$   $x = -9$

4.  $x - 5 = 2$   $x = 7$

5.  $6x - 4 = 2x + 8$   $x = 3$

6.  $2x + 4 = 10$   $x = 3$

7.  $7x + 5 = 3x + 17$   $x = 3$

8.  $3x - 6 = 9$   $x = 5$

9.  $8x - 6 = 2x + 12$   $x = 3$

10.  $5x + 2 = 17$   $x = 3$

11.  $10x + 4 = 6x + 24$   $x = 5$

12.  $4x - 8 = 12$   $x = 5$

13.  $9x - 3 = 2x + 11$   $x = 2$

14.  $6x + 3 = 21$   $x = 3$

15.  $12x + 8 = 4x + 24$   $x = 2$

16.  $7x - 2 = 19$   $x = 3$

17.  $5x + 3 = 2x + 12$   $x = 3$

18.  $9x + 5 = 50$   $x = 5$

19.  $4x - 7 = 3x + 1$   $x = 8$

20.  $8x - 4 = 28$   $x = 4$

21.  $11x + 9 = 5x + 21$   $x = 2$

22.  $x + 7 = 12$   $x = 5$

23.  $3x - 5 = x + 7$   $x = 6$

24.  $x - 9 = -2$   $x = 7$

25.  $2x + 5 = 11$   $x = 3$

26.  $7x + 2 = 3x + 10$   $x = 2$

27.  $7x + 4 = 25$   $x = 3$

28.  $9x - 8 = 4x + 7$   $x = 3$

29.  $x + 4 = 9$   $x = 5$

30.  $2x + 6 = 5x - 9$   $x = 5$

**Oefening 3.2.2.** Los volgende lineaire vergelijking op naar de onbekende  $x$ .

1.  $4x - 5 = 11$   $x = 4$

2.  $6x - 2 = 3x + 10$   $x = 4$

3.  $6x - 7 = 11$   $x = 3$

4.  $8x + 5 = 2x + 23$   $x = 3$

5.  $3x - 5 = 10$   $x = 5$

6.  $10x - 3 = 4x + 15$   $x = 3$

7.  $8x - 3 = 29$   $x = 4$

8.  $7x + 4 = 2x + 19$   $x = 3$

9.  $2x + 7 = 13$   $x = 3$

10.  $5x - 6 = 2x + 9$   $x = 5$

11.  $3x + 7 = x + 15$   $x = 4$

12.  $10x + 2 = 32$   $x = 3$

13.  $12x - 5 = 7x + 10$   $x = 3$

14.  $x - 6 = -1$   $x = 5$

15.  $4x + 9 = 2x + 19$   $x = 5$

16.  $4x + 8 = 24$   $x = 4$

17.  $11x + 8 = 5x + 26$   $x = 3$

18.  $3x - 4 = 8$   $x = 4$

19.  $6x - 4 = 2x + 12$   $x = 4$

20.  $5x + 6 = 26$   $x = 4$

## 4.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

## 4.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

Met deze pagina kan je het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen in één onbekende met voorschrift  $ax^2 + bx + c = 0$  inoefenen. Onder 'download' kan je de pdf met of zonder antwoorden downloaden.

**Oefening 4.1.1.** Bepaal de oplossingen van de vierkantsvergelijking  $x^2 - 4x + 3 = 0$ .

1. De discriminant is **positief✓**.

2. Deze vergelijking heeft **twee oplossingen✓** in de reële getallen.

3. Bepaal de wortels.

**Uitwerking:** In het algemeen wordt een tweedegraadsvergelijking in één onbekende gegeven door het voorschrift  $ax^2 - bx + c = 0$ . De tweedegraadsvergelijking  $x^2 - 4x + 3 = 0$  heeft als coëfficiënten gelijk aan  $a = 1$ ,  $b = -4$  en  $c = 3$ . We zoeken de getalwaarden voor  $x$  waarvoor deze vergelijking gelijk is aan nul. Hiervoor kan de formule met discriminant gebruikt worden.

De discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  is gelijk aan  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$ . De vierkanswortel wordt dan gegeven door  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$ . Er zijn dus twee oplossingen omdat de discriminant positief is. Deze oplossingen worden gegeven door:

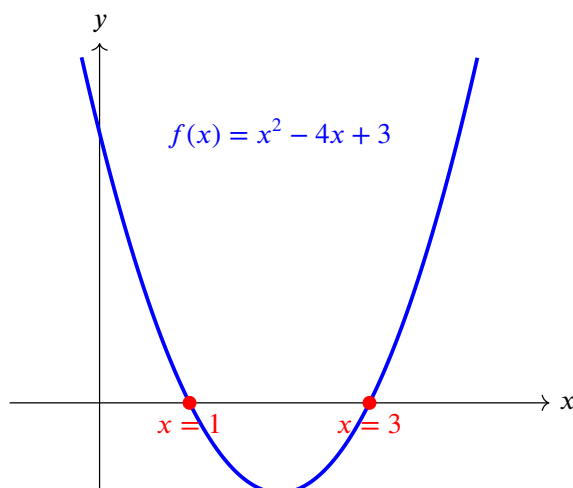
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Invullen levert:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = 1$$

Als je de vergelijking beschouwt als een functievoorschrift, zijn deze oplossingen de snijpunten van de parabool  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  met de  $x$ -as. Aangezien de discriminant positief is, zal de parabool de  $x$ -as 2 keer snijden.



Met de discriminantformule bereken je dus deze snijpunten met de  $x$ -as zonder grafiek van de functie .

**Oefening 4.1.2.** Bepaal de oplossingen van de vierkantsvergelijking  $x^2 - 4x + 4 = 0$  .

### 4.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

1. De discriminant is **nul✓**.
2. Deze vergelijking heeft **één oplossing✓** in de reële getallen.
3. Bepaal de wortels.

**Uitwerking:** In het algemeen wordt een tweedegraadsvergelijking gegeven door het voorschrift  $ax^2 - bx + c = 0$ . Voor de vergelijking

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

hebben we:

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 4.$$

Bereken de discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0.$$

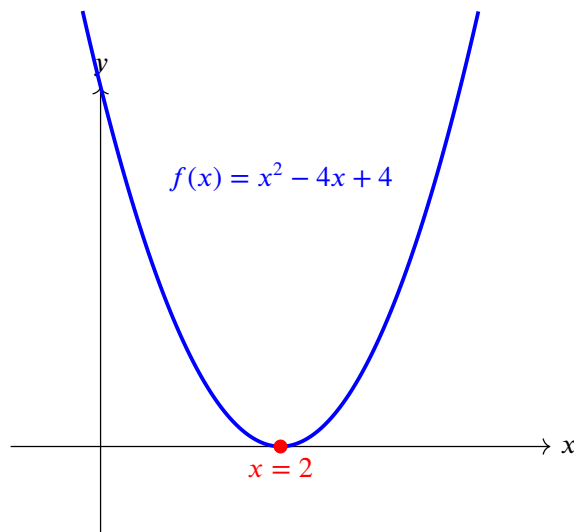
Aangezien  $\Delta = 0$  is er één oplossing (dubbele wortel), gegeven door:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Als functievoorschrift is

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

een parabool die de  $x$ -as raakt in het punt  $(2, 0)$ .



**Oefening 4.1.3.** Bepaal de oplossingen van de vierkantsvergelijking  $x^2 - 4x + 5 = 0$ .

1. De discriminant is **negatief✓**.
2. Deze vergelijking heeft **geen oplossingen✓** in de reële getallen.

**Uitwerking:** Voor de vergelijking  $x^2 - 4x + 5 = 0$

hebben we:

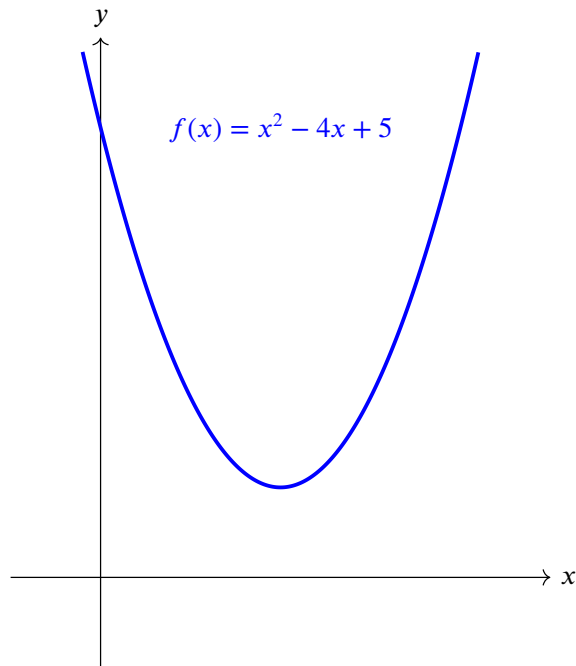
$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 5.$$

De discriminant wordt berekend als:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Aangezien  $\Delta < 0$  zijn er geen reële oplossingen.

De grafiek van de parabool ligt volledig boven de  $x$ -as. Er zijn geen snijpunten.



**Oefening 4.1.4.** Bepaal de oplossingen van volgende tweedegraadsvergelijkingen.

1.  $x^2 - 4x + 3 = 0$  Er zijn twee reële oplossingen 1 en 3
2.  $-2x^2 + 4x + 8 = 0$  Er zijn twee reële oplossingen  $-2$  en 4
3.  $2x^2 - 8x + 16 = 0$  De dubbele wortel is gelijk aan 2
4.  $2x^2 + 5x + 2 = 0$  Er zijn twee reële oplossingen  $-\frac{1}{2}$  en  $-2$
5.  $3x^2 - 6x + 3 = 0$  De dubbele wortel is gelijk aan 1

**Oefening 4.1.5.** Bepaal de oplossingen van volgende tweedegraadsvergelijkingen.

1.  $x^2 + 4x + 5 = 0$  Er zijn geen oplossingen in de reële getallen.
2.  $x^2 + 2x - 8 = 0$  Er zijn twee reële oplossingen  $-4$  en 2
3.  $4x^2 + 12x + 9 = 0$  De dubbele wortel is gelijk aan  $-\frac{3}{2}$
4.  $3x^2 + 6x + 3 = 0$  De dubbele wortel is gelijk aan  $-1$
5.  $-x^2 + 4x + 1 = 0$  Er zijn twee reële oplossingen  $-\frac{1}{2}$  en 5

## 5.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen in de complexe getallen

## 5.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen in de complexe getallen

**Eigenschap 5.1.1.**

Een (reële) tweedegraadsvergelijking van de vorm  $ax^2 + bx + c$ , met  $a, b, c \in \mathbb{R}$  en  $a \neq 0$  heeft altijd twee complex toegevoegde oplossingen, namelijk

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

die echter samenvallen als  $b^2 - 4ac = 0$ , en dan gelijk worden aan  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ .

**Oefening 5.1.1.**

- De wortels van  $x^2 + 4x + 5 = 0$  zijn  $-2 + i$  en  $-2 - i$
- De wortels van  $x^2 - 6x + 10 = 0$  zijn  $3 + i$  en  $3 - i$
- De wortels van  $-2x^2 + 4x + 8 = 0$  zijn  $-2$  en  $4$
- De wortels van  $x^2 + 2x + 2 = 0$  zijn  $-1 + i$  en  $-1 - i$
- De wortels van  $3x^2 - 6x + 3 = 0$  zijn  $1$  (dubbele wortel)
- De wortels van  $3x^2 - 6x + 7 = 0$  zijn  $1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}$  en  $1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}$
- De wortels van  $5x^2 + 10x + 15 = 0$  zijn  $-1 + i$  en  $-1 - i$
- De wortels van  $4x^2 + 4x + 5 = 0$  zijn  $-\frac{1}{2} + i$  en  $-\frac{1}{2} - i$
- De wortels van  $x^2 - 8x + 20 = 0$  zijn  $4 + 2i$  en  $4 - 2i$
- De wortels van  $x^2 - 4x + 3 = 0$  zijn  $1$  en  $3$

**Oefening 5.1.2.**

- De wortels van  $2x^2 + 4x + 5 = 0$  zijn  $-1 + i$  en  $-1 - i$
- De wortels van  $2x^2 + 5x + 2 = 0$  zijn  $-\frac{1}{2}$  en  $-2$
- De wortels van  $2x^2 + 6x + 10 = 0$  zijn  $-1.5 + i$  en  $-1.5 - i$
- De wortels van  $3x^2 + 9x + 15 = 0$  zijn  $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  en  $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- De wortels van  $x^2 + 6x + 10 = 0$  zijn  $-3 + i$  en  $-3 - i$
- De wortels van  $x^2 + 2x - 8 = 0$  zijn  $-4$  en  $2$
- De wortels van  $2x^2 - 4x + 6 = 0$  zijn  $1 + i$  en  $1 - i$
- De wortels van  $3x^2 + 12x + 20 = 0$  zijn  $-2 + \frac{2i}{\sqrt{3}}$  en  $-2 - \frac{2i}{\sqrt{3}}$
- De wortels van  $4x^2 + 8x + 18 = 0$  zijn  $-1 + \frac{\sqrt{2}i}{2}$  en  $-1 - \frac{\sqrt{2}i}{2}$
- De wortels van  $x^2 + 4x + 8 = 0$  zijn  $-2 + i$  en  $-2 - i$



## 5.2 Complexe getallen voorstellen in het complexe vlak

## 5.2 Complexe getallen voorstellen in het complexe vlak

## Oefening 5.2.1.

1.  $z_1 = 3 + 4i$  Polaire vorm:  $5 \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \right) \right)$
2.  $z_2 = 5 \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $3 + 4i$
3.  $z_3 = -2 + i$  Polaire vorm:  $\sqrt{5} \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{-1}{2} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{-1}{2} \right) \right) \right)$
4.  $z_4 = \sqrt{5} \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{-1}{2} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{-1}{2} \right) \right) \right)$  Cartesische vorm:  $-2 + i$
5.  $z_5 = 5$  Polaire vorm:  $5(\cos(0) + i \sin(0))$
6.  $z_6 = 5(\cos(0) + i \sin(0))$  Cartesische vorm:  $5$
7.  $z_7 = -3 - 4i$  Polaire vorm:  $5 \left( \cos(\pi + \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right)) + i \sin(\pi + \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right)) \right)$
8.  $z_8 = 5 \left( \cos \left( \pi + \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \right) + i \sin \left( \pi + \tan^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \right) \right)$  Cartesische vorm:  $-3 - 4i$
9.  $z_9 = 2 - 2i$  Polaire vorm:  $2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{4} \right) \right)$
10.  $z_{10} = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{-\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{4} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $2 - 2i$

## Oefening 5.2.2.

1.  $z_1 = 1 + i$  Polaire vorm:  $\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$
2.  $z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $1 + i$
3.  $z_3 = -1$  Polaire vorm:  $1(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$
4.  $z_4 = 1(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$  Cartesische vorm:  $-1$
5.  $z_5 = 0 + 5i$  Polaire vorm:  $5 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$
6.  $z_6 = 5 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $0 + 5i$
7.  $z_7 = -4 + 0i$  Polaire vorm:  $4(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$
8.  $z_8 = 4(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$  Cartesische vorm:  $-4 + 0i$
9.  $z_9 = 3i$  Polaire vorm:  $3 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$
10.  $z_{10} = 3 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $3i$

## Oefening 5.2.3.

1.  $z_1 = 4 + 0i$  Polaire vorm:  $4(\cos(0) + i \sin(0))$
2.  $z_2 = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $0 + 2i$
3.  $z_3 = 0 + 2i$  Polaire vorm:  $2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$
4.  $z_4 = 4(\cos(0) + i \sin(0))$  Cartesische vorm:  $4 + 0i$
5.  $z_5 = -2 - 3i$  Polaire vorm:  $\sqrt{13} \left( \cos(\pi + \tan^{-1} \left( \frac{3}{2} \right)) + i \sin(\pi + \tan^{-1} \left( \frac{3}{2} \right)) \right)$
6.  $z_6 = \sqrt{13} \left( \cos \left( \pi + \tan^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right) + i \sin \left( \pi + \tan^{-1} \left( \frac{3}{2} \right) \right) \right)$  Cartesische vorm:  $-2 - 3i$
7.  $z_7 = 1 - 3i$  Polaire vorm:  $\sqrt{10} \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{-3}{1} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{-3}{1} \right) \right) \right)$
8.  $z_8 = \sqrt{10} \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{-3}{1} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{-3}{1} \right) \right) \right)$  Cartesische vorm:  $1 - 3i$
9.  $z_9 = 2 + 0i$  Polaire vorm:  $2(\cos(0) + i \sin(0))$
10.  $z_{10} = 2(\cos(0) + i \sin(0))$  Cartesische vorm:  $2 + 0i$

---

5.2 Complexe getallen voorstellen in het complexe vlak

---

**Oefening 5.2.4.**

1.  $z_1 = -1 + 0i$  Polaire vorm:  $1(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$
2.  $z_2 = \sqrt{20} \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{2}{-4} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{2}{-4} \right) \right) \right)$  Cartesische vorm:  $-4 + 2i$
3.  $z_3 = -4 + 2i$  Polaire vorm:  $\sqrt{20} \left( \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{2}{-4} \right) \right) + i \sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{2}{-4} \right) \right) \right)$
4.  $z_4 = 1(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$  Cartesische vorm:  $-1 + 0i$
5.  $z_5 = 0 + 4i$  Polaire vorm:  $4 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$
6.  $z_6 = 4 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $0 + 4i$
7.  $z_7 = 3 + 0i$  Polaire vorm:  $3(\cos(0) + i \sin(0))$
8.  $z_8 = 3(\cos(0) + i \sin(0))$  Cartesische vorm:  $3 + 0i$
9.  $z_9 = -5 + 5i$  Polaire vorm:  $5\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right)$
10.  $z_{10} = 5\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right)$  Cartesische vorm:  $-5 + 5i$

## 6.1 oefening

## 6.1 oefening

**Oefening 6.1.1.** Zoek een gehele oplossing voor volgende vergelijking **zonder** de haakjes uit te werken...

$$(x + 3)(x + 5)(x + 7)(x + 9) = 9$$

Ik zoek een negatief ✓ getal.

**Uitwerking:** De delers van 9 zijn  $\pm 1, \pm 3$  en  $\pm 9$ . Omdat we een gehele oplossing zoeken is elke factor aan de linkerkant gelijk aan een deler. Er werd reeds opgemerkt dat de oplossing negatief moet zijn. Voor de eerste factor  $x + 3$  geeft dit als mogelijke waarden voor  $x$ :

- $x = -2$
- $x = -6$
- $x = -12$

Ook de factor  $x - 7$  moet gelijk zijn aan een deler, dit is enkel het geval voor  $x = -6$ . Invullen levert  $(-3) \cdot (-1) \cdot (1) \cdot (3) = 9$ .