

De polaire schrijfwijze van complexe getallen

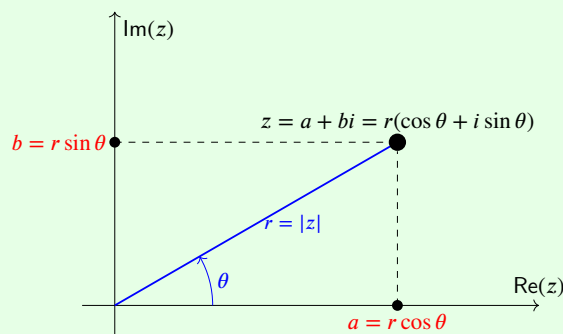
In het vorig hoofdstuk werd een punt in het complexe vlak beschreven met behulp van cartesische coördinaten. In dit hoofdstuk wordt een alternatieve manier behandeld om punten in het complexe vlak te beschrijven. Hiermee zullen verschillende operaties van complexe getallen, waaronder de vermenigvuldiging, veel eenvoudiger en inzichtelijker worden.

Vlugge Vraag

Is er een andere manier waarmee je een punt in het vlak zou kunnen beschrijven?

De cartesische schrijfwijze associeert met een elk complex getal $z = a + bi$ het koppel (a, b) . Het reëel deel a komt overeen met de projectie op de reële as, het imaginair deel b komt overeen met de projectie op de imaginaire as. De polaire vorm associeert met elk complex getal in het vlak een koppel poolcoördinaten (r, θ) . Hierbij is $r = |z|$ de norm (afstand tot de oorsprong) en θ de hoek die de overeenkomstige vector maakt met de positieve reële as. Op die manier wordt elk complex getal beschreven met een uniek koppel poolcoördinaten.

Definitie 1. De *poolcoördinaten* van een complex getal zijn het koppel (r, θ) , hierbij is $r = |z|$ de **modulus** en θ het **argument**. De hoek θ wordt gemeten in radialen, in tegenwijzerzin, en is slechts op een veelvoud van 2π na bepaald.



Op die manier krijgt elk complexe getal een polaire schrijfwijze $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

Men kan een complexe getal in cartesische schrijfwijze $z = a + bi$ omvormen naar polaire vorm $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ en vice versa. Het zal blijken dat sommige berekeningen veel eenvoudiger zijn in één van beide schrijfwijzes. De stelling van pythagoras en de goniometrische getallen leggen het verband tussen de cartesische en polaire schrijfwijze.

Eigenschap 1 (Transformatieformules cartesische en goniometrische schrijfwijze).

Een complex getal z met goniometrische schrijfwijze $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ heeft als cartesische schrijfwijze $a + bi$ met:

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

Een complex getal z met cartesische schrijfwijze $a + bi$ heeft als goniometrische schrijfwijze $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ met:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

De polaire schrijfwijze van complexe getallen

Vlugge Vraag

Gebruik de stelling van pythagoras en de definitie van de cosinus, sinus en tangens in een rechthoekige driehoek om bovenstaande formules af te leiden.

Opmerking 1.

- Omdat θ niet uniek bepaald is, heeft elk complex getal $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ *oneindig veel goniometrische schrijfwijzes* $z = r(\cos(\theta + k2\pi) + i \sin(\theta + k2\pi))$, met $k \in \mathbb{Z}$. Vaak wordt er echter voor gekozen om θ tussen 0 en 2π te geven: we kunnen ons sneller voorstellen waar de hoek $\frac{5\pi}{4}$ ligt dan de hoek $\frac{1093\pi}{4}$.
- Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 1.

Geef de goniometrische schrijfwijze van volgende complexe getallen waarvan het argument gemakkelijk grafisch gevonden kan worden:

1. $z = 1$

Uitwerking: Voor $z = 1$ is de modulus 1 en het argument 0, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \cos 0 + i \sin 0 \text{ of } z = \cos 2\pi + i \sin 2\pi.$$

2. $z = i$

Uitwerking: Voor $z = i$ is de modulus 1 en het argument $\frac{\pi}{2}$, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

3. $z = 1 + i$

Uitwerking: Voor $z = 1 + i$ is de modulus $\sqrt{2}$ en het argument $\frac{\pi}{4}$, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

Uitwerking: Voor $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ is de modulus 1 en het argument $\frac{\pi}{4}$, dus de goniometrische schrijfwijze is

$$z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}.$$

Merk op: bij het opschrijven van de goniometrische schrijfwijze met concrete getallen moet je de sin en cos laten staan. Als je die toch zou uitrekenen, krijg je immers terug de cartesische schrijfwijze.

Opmerking 2.

Als $a \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad \text{als } a \neq 0$$

Als $a > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan} \left(\frac{b}{a} \right) \quad \text{als } a > 0$$

De polaire schrijfwijze van complexe getallen

Als $a < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{als } a < 0$$

Als $a = 0$, dan ligt $z = a + bi$ op de y -as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b > 0$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ :

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\frac{b}{a} & \text{als } a > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\frac{b}{a} & \text{als } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b < 0 \end{cases}$$