Wortels van complexe getallen

Het begrip n-de machtswortel van de reële getallen kan op het eerste zicht ook eenvoudig worden gebruikt bij complexe getallen. Er treden echter enkele nieuwe fenomenen op.

Definitie 1.

Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ en complex getal $w \in \mathbb{C}$ is een complex getal $z \in \mathbb{C}$ **een n-de machtswortel van** w als de n-de macht van z gelijk is aan w:

$\boxed{z \text{ is } \textbf{een } n\textbf{-de machtswortel van } w \iff z^n = w}$ $\boxed{2^4 = (-2)^4 = 16, \quad (-2i)^3 = 8i}$

Voorbeeld 1. Welke van volgende uitspraken zijn waar?

1. Juist ✓ 3 is een derdermachtswortel van 27
2. Fout ✓ -3 is een derdermachtswortel van 27
3. Juist ✓ i is een vierkantswortel van -1
4. Fout ✓ $2+3i$ is een vierkantswortel van $4+9i$
5. Juist ✓ $2+3i$ is een vierkantswortel van $-5+12i$

Opmerking 1.

- Net zoals bij de reële getallen is het begrip n-de machtswortel van a dus eigenlijk gewoon een naam voor *een oplossing van de vergelijking* $x^n = a$.
- Bij de reële getallen was er een belangrijk onderscheid tussen n even en n oneven omdat negatieve getallen geen even machtswortels hebben, en positieve getallen twee even machtswortels hebben:

$$\begin{array}{lll} x^2 = 4 & \text{heeft twee reële oplossingen:} & x = 2 \text{ en } x = -2 \\ x^2 = -4 & \text{heeft geen reële oplossingen:} & x^2 \neq -4, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^3 = 8 & \text{heeft een unieke reële oplossing:} & x = 2 \\ x^3 = -8 & \text{heeft een unieke reële oplossing:} & x = -2 \end{array}$$

  Er zijn altijd ten hoogste twee reële n-de machtswortels, en als $a \in \mathbb{R}$ twee n-de machtswortel had noemden we de unieke positieve **de** n-machtswortel, en noteerden die met $\sqrt[n]{a}$ of $a^{1/n}$. Voor n even was dan ook $-\sqrt[n]{a}$ *een* n-de machtswortel.
- Bij complexe getallen is de zaak enerzijds eenvoudiger: we zullen zien dat er *altijd* precies n n-de machtswortels zijn. Anderzijds is het niet meer mogelijk om over **de** n-de machtswortel te spreken. We zullen dan ook de notatie $\sqrt[n]{z}$ of $z^{1/n}$ niet gebruiken.

Vergelijkingen van de vorm $z^n = a + bi$ met $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ zijn met de formule van De Moivre op te lossen.

Voorbeeld 2. Bereken alle vierkantswortels van $1 - i$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Voor het rechterlid $1 - i$ geldt

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4},$$

zodat

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

De vergelijking $z^2 = 1 - i$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^2 = \sqrt{2} \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2^{1/4}$ en $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We hebben de onbekenden r en θ dus gevonden.

Voor $k = 0$ is $\theta = -\frac{\pi}{8}$ en voor $k = 1$ is $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van beide hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus precies twee verschillende oplossingen

$$z_1 = 2^{1/4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \qquad \text{en} \qquad z_2 = 2^{1/4}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

Voorbeeld 3. Vind alle vierdemachtswortels uit 1.

Uitwerking: We zoeken alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$.

We stellen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta).$$

Voor het rechterlid 1 geldt

$$|1| = 1, \qquad \arg(1) = 0,$$

zodat

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

De vergelijking $z^4 = 1$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

Gelijkheid van complexe getallen leert ons dat

$$r^4 = 1 \text{ met } r \in \mathbb{R}^+ \text{ en } 4\theta = 0 + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 1$, want $r^4 = 1$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = k\pi/2$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Dit levert vier verschillende wortels.
$z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$,
$z_2 = 1(\cos \pi/2 + i\sin \pi/2) = i$,
$z_3 = 1(\cos \pi + i\sin \pi) = -1$,
$z_4 = 1(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2) = -i$.

Dit voorbeeld kan je veel sneller oplossen door $z^4 - 1$ te ontbinden in factoren:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

De nulpunten hiervan zijn inderdaad 1,-1,i,-i. Ontbinden in factoren lukt echter niet meer bij bijvoorbeeld $z^5 = 1$, hiervoor moet je bovenstaande methode gebruiken.

Oefening 1. Bereken alle derdemachtswortels van $8i$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta).$$

Voor het rechterlid $8i$ geldt

$$|8i| = 8, \qquad \arg(8i) = \frac{\pi}{2},$$

zodat

$$8i = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})).$$

De vergelijking $z^3 = 8i$ wordt:

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^3 = 8 \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2$, want $r^3 = 8$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Voor $k = 0$ is $\theta = \frac{\pi}{6}$, voor $k = 1$ is $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ en voor $k = 2$ is $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van deze hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus drie verschillende oplossingen

$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i,$
$z_2 = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i,$
$z_3 = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = 2(0 + i(-1)) = -2i.$

Je kan de vergelijking $z^n = w$ oplossen voor een algemeen getal $w \in \mathbb{C}$, en dan krijg je formules die je daarna kan gebruiken. Het resultaat geeft volgende interessante eigenschap: de vergelijking $z^n = w$ heeft voor elke $w \in \mathbb{C}_0$ precies n oplossingen:

Eigenschap 1. Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}_0$ heeft de vergelijking $z^n = w$ precies n verschillende complexe oplossingen

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \text{ met } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Bewijs. ➤ Bewijs

Laat $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ en $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. We zoeken alle oplossingen z van de vergelijking $z^n = w$.

Schrijf z in polaire vorm:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

met $\rho > 0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$.

Dan geldt, met de formule van De Moivre:

$$z^n = \rho^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

De vergelijking $z^n = w$ wordt dus:

$$\rho^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Gelijkheid van complexe getallen in polaire vorm geeft:

$$\rho^n = r \quad \text{en} \quad n\varphi = \theta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Hieruit volgt:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

Dus de oplossingen zijn:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Omdat cos en sin 2π-periodiek zijn, geven de waarden $k = 0, 1, \dots, n-1$ precies n verschillende oplossingen. Voor $k \geq n$ of $k < 0$ herhalen de oplossingen zich.

Dus er zijn precies n verschillende oplossingen.

■

Liefhebbers van de Euler notatie kunnen veel eenvoudiger schrijven

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\theta+2\pi k}{n}} \text{ met } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$