Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

De n-de macht van een complexe getal z^n is het n-voudig product $z \cdot z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$. (n-keer invoegen). Met de vermenigvuldiging van complexe getallen kan dit n-voudig product uitgerekend worden. Ook hier zijn de berekeningen met de goniometrische schrijfwijze veel eenvoudiger.

Het meest eenvoudige geval $n = 2$ is het kwadraat z^2 van een complex getal. Dit is de vermenigvuldiging van het complex getal met zichzelf. Voor een complex getal z met als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ wordt dit:

$$z^2 = z \cdot z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^2(\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)) = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Het herhalen van deze methode levert dan hogere machten van een complex getal. $z^3 = z^2 \cdot z$. Het algemene resultaat staat bekend als de formule van DeMoivre:

Eigenschap 1 (Formule van De Moivre)**.**
Voor een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en elk natuurlijk getal n geldt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Voorbeeld 1. We kunnen $(1+i)^8$ op 2 manieren berekenen:

(a) $(1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$, dus $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = (2i)^2 = -4$, dus $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

(b) $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, dus $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i \cdot 0) = 16$

Oefening 1. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = 8i$
2. $(-1-i)^{20} = -1024$
3. $(1+i)^{21} = -1024 - 1024i$
4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = 16\sqrt{3} + 16i$

Oefening 2. Gegeven is het complex getal $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$.

1. Bereken $z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots, z^8$ en schrijf telkens het resultaat in cartesische vorm.

Uitwerking:

Het getal z ligt op de eenheidscirkel ($r = 1$) met argument $\frac{3\pi}{4}$. Volgens de formule van De Moivre geldt voor elke natuurlijke exponent n:

$$z^n = \cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}\,.$$

Omdat $\cos\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, vind je in cartesische vorm:

$$z^0 = 1, \qquad z^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z^2 = -i,$$

$$z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z^4 = -1, \qquad z^5 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z^6 = i, \qquad z^7 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad z^8 = 1\,.$$

2. Stel de opeenvolgende machten van z voor in het complexe vlak. Wat valt je op?

Uitwerking:

Alle punten liggen op de eenheidscirkel. Bij elke verhoging van de exponent met 1 roteert het beeldpunt over een vaste hoek $\frac{3\pi}{4}$ rond de oorsprong (vermenigvuldigen met z is dus een rotatie over $135°$). Na acht stappen ben je terug bij $z^8 = 1 = z^0$: de acht punten vormen een regelmatige achthoek op de cirkel (de machten herhalen zich met periode 8 omdat $8 \cdot \frac{3\pi}{4} = 6\pi$ een veelvoud van 2π is).