Wiskunde Op Maat

Wiskundeplan

Rekenvaardigheden

(Versie 2025/02/24.39)

Inhoudsopgave

1.1 Inleiding

Wiskundeplan[1] schenkt in de tweede graad extra aandacht aan rekenvaardigheden. Het lesmateriaal[2] over ontbinden in factoren en rationale lettervormen is hier in licht uitgebreide versie beschikbaar. Ook de rekenvaardigheden uit de eerste graad werden hier toegevoegd. Het materiaal staat op zichzelf en kan helpen bij het inoefenen en remediëren van de belangrijkste rekentechnieken uit de eerste en tweede graad van het middelbaar.

Fouten, verbeteringen en andere suggesties kunnen gemeld worden via kwinten@wiskunde.opmaat.org.

Bronnen (zoals vermeld op https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/)

Delta Nova
E.Jennekens -G.Deen, Wiskunde '68
WPP

[1]See Wiskundeplan at https://wiskundeplan.be/
[2]See lesmateriaal at https://wiskundeplan.be/lesmateriaal/

2.1 Rekenen met breuken

Deze pagina geeft een overzicht van de rekenregels voor breuken. De focus ligt op rekenvaardigheid. Voor meer nauwkeurige en theoretische bespreking verwijzen we door naar een handboek.

Definitie 2.1.1.

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\dfrac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.

We noemen a de **teller** en b de **noemer**. Zodra de noemers verschillend zijn van 0, geldt:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \iff \boxed{ad = bc} \qquad \text{gelijkheid van breuken}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{ad + cb}{bd} \qquad \text{optelling}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{vermenigvuldiging}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{deling}$$

Uit deze definities volgen enkele belangrijke rekenregels:

Eigenschap 2.1.1.

$$\frac{a \cdot c}{a \cdot d} = \frac{\cancel{a} \cdot c}{\cancel{a} \cdot d} = \frac{c}{d} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } a \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{a \cdot d} \qquad \text{(met factor } a \text{ vermenigvuldigen)}$$

$$a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{a \cdot c}{d} = a \cdot \frac{c}{d} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

2.1 Rekenen met breuken

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c}$$ (getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)

Er zijn ook enkele minder voor de hand liggende operaties mogelijk die in oefeningen vaak handig blijken:

Eigenschap 2.1.2. Je kan altijd

$$a + c = d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right)$$ een niet bestaande factor buiten haakjes brengen.

$$a = \frac{a}{1} = \frac{1}{\frac{1}{a}}$$ van 'geen breuk' toch een breuk maken.

$$a \cdot b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$$ van een product een breuk maken.

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$ van een breuk een product maken.

Bij het rekenen met breuken zijn er enkele foutieve operaties die voor leerlingen soms erg aanlokkelijk zijn. Doe jezelf (en je leerkracht...) een plezier en overtuig jezelf dat de volgende uitdrukkingen verkeerd zijn.

Opmerking 2.1.1. In het algemeen geldt niet:

$$\frac{a}{b+c} \cancel{=} \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{a+1} \cancel{=} \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}+1} \cancel{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

2.1.A Oefeningen breuken

Oefening 2.1.1. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

Uitwerking: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. $\frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Uitwerking: $\frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{4}{18} - \frac{3}{18} = \frac{1}{18}$

3. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$

Uitwerking: $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \frac{9}{27} - \frac{3}{27} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$

4. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

Uitwerking: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$

5. $\frac{15}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$

Uitwerking: $\frac{15}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$

6. $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{4}{18} = \frac{2}{55}$

Uitwerking: $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{4}{18} = \frac{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{9}^1 \cdot 2}{5 \cdot \cancel{22}_{11} \cdot \cancel{9}_1} = \frac{2}{55}$

7. $\frac{6}{5} : \frac{2}{15} = 9$

Uitwerking: $\frac{6}{5} : \frac{2}{15} = \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2} = \frac{\cancel{6}^3 \cdot \cancel{15}^3}{\cancel{5}_1 \cdot \cancel{2}_1} = \frac{9}{1} = 9$

8. $\frac{12}{25} : \frac{18}{35} = \frac{14}{15}$

Uitwerking: $\frac{12}{25} : \frac{18}{35} = \frac{12}{25} \cdot \frac{35}{18} = \frac{\cancel{12}^2 \cdot \cancel{35}^7}{\cancel{25}_5 \cdot \cancel{18}_3} = \frac{14}{15}$

9. $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$

Uitwerking: $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

10. $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Uitwerking: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2+1}{4}}{\frac{1+2}{6}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{6}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{3} = \frac{3}{2}$

Oefening 2.1.2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20 \cdot (\frac{5}{4} - \frac{4}{5}) = 9$

2. $-\frac{6}{27} + \frac{27}{1} + \frac{16+14}{9} - \frac{3}{14+13} - 3 \cdot 9 = 3$

3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1} = 1$ $(a \neq -1)$

Oefening 2.1.3. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Veronderstel dat alle uitdrukkingen bestaan.

2.1.A Oefeningen breuken

1. $\dfrac{a-b}{c} - \dfrac{a-2b}{2c} = \dfrac{a}{2c}$

2. $\dfrac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = -1$

3. $\dfrac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} = -\dfrac{1}{a}$

4. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac+b^2}{bc}$

5. $a + \dfrac{a}{1+a} = \dfrac{2a+a^2}{1+a}$

6. $1 + \dfrac{a}{1+a} = \dfrac{1+2a}{1+a}$

7. $1 + \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{2+a}{1+a}$

8. $a + \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{1+a+a^2}{1+a}$

9. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+a}} = \dfrac{1+a}{2+a}$

10. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+a}}} = \dfrac{2+a}{3+2a}$

2.2 Rekenen met machten

Deze pagina geeft een overzicht van de rekenregels voor machten. De focus ligt op rekenvaardigheid. Voor meer nauwkeurige en theoretische bespreking verwijzen we door naar een handboek.

Definitie 2.2.1. (Machtsverheffing)

Voor een natuurlijk getal n en een reëel getal a is de n-**de macht** van a het getal

$$\boxed{a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}} \qquad \boxed{2^3 = 2 \times 2 \times 2}$$

Men noemt a het **grondtal**, n de **exponent** en a^n een **macht**.

Negatieve exponenten geven per definitie het omgekeerde van de macht met de positieve exponent:

$$\boxed{a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}} \qquad \boxed{2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}}$$

Als de exponent 0 is (en het grondtal is niet 0), geldt per definitie dat $\boxed{a^0 = 1}$, als $a \neq 0$.
De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben *geen betekenis*.

Oefening 2.2.1. Welke formules zijn waar?

1. Fout $(-2)^2 = -4$
2. Juist $-2^2 = -4$
3. Fout $2^{-2} = -4$
4. Juist $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
5. Juist $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
6. Fout $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2} = -4$

Definitie 2.2.2. (Machtswortels)

Een reëel getal b is ***een* vierkantswortel** van een reëel getal a als

$$\boxed{a = b^2} \qquad \boxed{2 \text{ en } -2 \text{ zijn wortels van } 4 \text{ want } 2^2 = 4 \text{ en } (-2)^2 = 4}$$

Voor positieve a noemen we het unieke *positieve* getal b zodat $b^2 = a$ ***de* vierkantswortel**, en die noteren we als $\sqrt{a}$ of ook als 'a tot de macht een half':

$$\boxed{\sqrt{a} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{2}} = b \iff b^2 = a \text{ en } b \geq 0} \qquad \boxed{\sqrt{25} \stackrel{\text{def}}{=} 25^{\frac{1}{2}} = 5}$$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ is dus het unieke *positieve* getal met kwadraat gelijk aan a.

Meer in het algemeen schrijven we ook n-de machtswortels als 'tot de macht $\frac{1}{n}$':

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \stackrel{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} = b \iff b^n = a} \qquad \boxed{\sqrt[3]{8} \stackrel{\text{def}}{=} 8^{\frac{1}{3}} = 2 \text{ want } 2^3 = 8}$$

Oefening 2.2.2. Welke formules zijn waar?

1. Juist $\sqrt{4} = 2$
2. Juist $-\sqrt{4} = -2$
3. Fout $\sqrt{-4} = -2$
4. Juist $\sqrt[3]{-8} = -2$
5. Fout $\sqrt[3]{9} = 3$
6. Juist $\sqrt[3]{27} = 3$

Uit deze definities volgen enkele belangrijke rekenregels:

2.2 Rekenen met machten

Eigenschap 2.2.1 (Rekenregels machten)**.**

$\boxed{(xy)^n = x^n y^n \quad \text{(macht van product)}}$ $\boxed{(3y)^2 = 3y \cdot 3y = 3 \cdot 3 \cdot y \cdot y = 3^2 y^2 = 9y^2}$

$\boxed{x^m x^n = x^{m+n} \quad \text{(product met gelijk grondtal)}}$ $\boxed{x^3 x^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x) = x^{3+2} = x^5}$

$\boxed{(x^m)^n = x^{m \cdot n} \quad \text{(macht van macht)}}$ $\boxed{\left(x^3\right)^2 = x^3 \cdot x^3 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^{3 \cdot 2} = x^6}$

$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad \text{(macht van breuk)}}$ $\boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x \cdot x \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}}$

Bij het rekenen met breuken zijn er enkele foutieve operaties die voor leerlingen soms erg aanlokkelijk zijn. Doe jezelf (en je leerkracht...) een plezier en overtuig jezelf dat de volgende uitdrukkingen verkeerd zijn.

Opmerking 2.2.1. In het algemeen geldt niet:

$$\sqrt{a+b} \xcancel{=} \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$x^n + x^m \xcancel{=} x^{n+m}$$

2.2.A Oefeningen machten

Oefening 2.2.3. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$
2. $(2^2)^3 = 2^6$
3. $2^{(2^3)} = 2^8$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^3$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = 2604^5$

Oefening 2.2.4. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = a^{-9/2}$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = x^{-3}y^{-4}$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = (ab)^4$

3.1 Ontbinden in factoren

Ontbinden in factoren is het omzetten van een som (van termen) in een product (van factoren). Er bestaan hiervoor verschillende methodes. We ontbinden altijd zo ver mogelijk.

Eigenschap 3.1.1. Afzonderen

Voor het rekenen met lettervormen geldt:

$$\boxed{ac + ad = a(c + d)} \qquad \boxed{4x + 4y = 4(x + y)}$$

Distributiviteit toepassen in omgekeerde richting noemen we **afzonderen**.

Voorbeeld 3.1.1.

1. $24x^3 - 15x^2 + 3 = 3(8x^2 - 5x + 1)$

2. $24x^3 - 15x^2 + x = x(24x^2 - 15x + 1)$

3. $24x^3 - 15x^2 + 3x = 3x(8x^2 - 5x + 1)$

4. $24x^3 - 15x^2 + 3x^4 = 3x^2(x^2 + 8x - 5)$

Soms kan je door haakjes toe te voegen bij een deel van de termen een factor afzonderen. Dit speciale geval van afzonderen noemt men 'samennemen 2 aan 2'. Zoals volgend voorbeeld illustreert is het mogelijk dat hierna verder vereenvoudigd kan worden.

Voorbeeld 3.1.2. Samennemen 2 aan 2

$$\begin{array}{rcl} 3x^3 - 6x^2 + x - 2 & = & (3x^3 - 6x^2) + (x - 2) \\ & = & 3x^2(x - 2) + (x - 2) \\ & = & (x - 2)(3x^2 + 1) \end{array}$$

Merk op dat het ook mogelijk is om commutativiteit te gebruiken en de haakjes anders te plaatsen:

$$\begin{array}{rcl} 3x^3 - 6x^2 + x - 2 & = & (-6x^2 - 2) + (3x^2 + x) \\ & = & -2(3x^2 + 1) + x(3x^2 + 1) \\ & = & (3x^2 + 1)(x - 2) \end{array}$$

De distributiviteitseigenschap toepassen levert enkele interessante gelijkheden. Aangezien ze vaak voorkomen kregen ze een eigen naam: de merkwaardige producten.

Eigenschap 3.1.2. Merkwaardige producten

Voor het rekenen met lettervormen:

$$\begin{array}{rcll} (a + b)^2 & = & a^2 + 2ab + b^2 & \text{(kwadraat van een som)} \\ (a - b)^2 & = & a^2 - 2ab + b^2 & \text{(kwadraat van verschil via } (a + (-b))^2\text{)} \\ a^2 - b^2 & = & (a + b)(a - b) & \text{(verschil van twee kwadraten)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} (a + b)^3 & = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \text{(derdemacht van een som)} \\ (a - b)^3 & = & a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & \text{(derdemacht van een verschil)} \end{array}$$

Bewijs

3.1 Ontbinden in factoren

De eigenschappen volgen rechtstreeks uit de distributiviteitseigenschap en de definitie van machtsverheffing.

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (ba^2 + 2ab^2 + b^3) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a^3 - 2a^2b + ab^2) - (-ba^2 + 2ab^2 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

■

Onderstaande kennisclip werkt zonder overbodige attributen de merkwaardige producten uit. YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=jyQTed3gHDA

Voorbeeld 3.1.3.

1. $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

2. $(3 - 2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$

3. $25x^2 - 3 = (5x - \sqrt{3})(5x + \sqrt{3})$

4. $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t - 2)^3$

Opmerking 3.1.1. Een merkwaardige visualisering

Het merkwaardige product $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kan visueel worden voorgesteld.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/yjajmaxb

3.1.A Oefeningen niveau 1

Oefening 3.1.1. Is de gegeven uitdrukking te beschouwen als een product of als een som?

1. $a \cdot b \cdot c + 1$ is een som
2. $(x+y)^2$ is een product
3. $a \cdot (4b + c)$ is een product
4. $x \cdot y + x \cdot z$ is een som
5. $a \cdot b \cdot (c+1)$ is een product

Oefening 3.1.2. Onderzoek telkens of je van links naar rechts ontbindt, uitwerkt, of geen van beide.

1. $(3a+b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$ uitwerken
2. $9a^2 + 6ab + b^2 = (3a+b)^2$ ontbinden
3. $4(x^2 - y^2) = 4x^2 - 4y^2$ uitwerken
4. $4(x^2 - y^2) = 4(x-y)(x+y)$ uitwerken
5. $3x^3 - 3x + 1 = 3x(x^2-1)+1 = 3x(x-1)(x+1)+1$ uitwerken
6. $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3 = (3a-b)^3$ uitwerken

Oefening 3.1.3. Ontbind in factoren door af te zonderen.

1. $\sqrt{5}a - 3\sqrt{5}b = \sqrt{5}(a-3b)$
2. $\sqrt{7}x^2 + 2\sqrt{7} = \sqrt{7}(x^2+2)$
3. $15a^2b + 12ab - 9ab^3 = 3ab(5a + 4 - 3b^2)$
4. $x(x+4) - 2(x+4) = (x+4)(x-2)$
5. $2a(3a+1) + 5b(3a+1) = (3a+1)(2a+5b)$
6. $(x-1)(x+3) - 5(x+3) = (x+3)(x-6)$
7. $(y^2+3)(y-2) + y - 2 = (y-2)(y^2+4)$
8. $(a+4)(3a+2) - 3a - 2 = (3a+2)(a+3)$
9. $(x-3)(2x+3) - (4x+1)(2x+3) = (2x+3)(-3x-4)$
10. $3(x-1) + (x-1)^2 = (x-1)(x+2)$

Oefening 3.1.4. Vul aan tot een merkwaardig product, indien mogelijk, en ontbind in dat geval.

1. $9x^2 + 24x + 16 = (3x+4)^2$
2. $a^2 - 6ab + 9b^2 = (a-3b)^2$
3. $49y^4 - 42y^2 + 9 = (7y^2+3)^2$
4. $121x^2 - 0x - 4 = (11x-2)(11x+2)$
5. $-81 - 4x^2 + 36x = -(2x-9)^2$

Oefening 3.1.5. Ontbind de tweetermen in factoren

1. $x^2 - 121 = (x-11)(x+11)$
2. $9x^2 + 16 =$ geen oplossing
3. $16x^2 - 25 = (4x-5)(4x+5)$
4. $4 - 9y^2 = (2-3y)(2+3y)$
5. $36a^2 - 5 = (6a - \sqrt{5})(6a + \sqrt{5})$
6. $4a^2 - 81b^2 = (2a-9b)(2a+9b)$
7. $144x^2 - 49y^4 = (12x - 7y^2)(12x + 7y^2)$
8. $5x^2 - 3 = (\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{3})$
9. $-4x^2 + 25y^2 = (5y-2x)(5y+2x)$
10. $-1 + 7x^2 = (\sqrt{7}x - 1)(\sqrt{7}x + 1)$

Oefening 3.1.6. Ontbind de drietermen in factoren

3.1.A Oefeningen niveau 1

1. $25x^2 - 20x + 4 = (5x - 2)^2$

2. $x^4 + 6x^2 + 9 = (x^2 + 3)^2$

3. $25a^2 - 30ab + 9b^2 = (5a - 3b)^2$

4. $81 + 126t + 49t^2 = (9 + 7t)^2$

5. $121x^2 + 66xy^2 + 9y^4 = (11x + 3y^2)^2$

Oefening 3.1.7. Ontbind de viertermen in factoren door termen samen te nemen.

1. $4x + 4y + ax + ay = (x + y)(4 + a)$

2. $3x + 5y + 6xy + 10y^2 = (3x + 5y)(1 + 2y)$

3. $2ax + 3a - 2bx - 3b = (2x + 3)(a - b)$

4. $7ab + 14a + b + 2 = (b + 2)(7a + 1)$

5. $1 - a - b + ab = (1 - a)(1 - b)$

6. $5x^3 - x^2 + 35x - 7 = (5x - 1)(x^2 + 7)$

7. $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$

8. $2x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 9 = (2x^2 + 3)(x^4 + 3)$

9. $a^2 - 6b - 2ab + 3a = (a - 2b)(a + 3)$

10. $12ab^2 - 1 - 4b^2 + 3a = (3a - 1)(4b^2 + 1)$

3.1.B Oefeningen niveau 2

Oefening 3.1.8. Ontbind zo ver mogelijk in factoren.

1. $4a^3 - 25a = a(2a-5)(2a+5)$
2. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
3. $18y^5 - 2y^3 = 2y^3(3y-1)(3y+1)$
4. $32a^3b - 50ab^3 = 2ab(4a-5b)(4a+5b)$
5. $144x^3 - x = x(12x-1)(12x+1)$
6. $16a^4 - 9b^4 = (2a-\sqrt{3}b)(2a+\sqrt{3}b)(4a^2+3b^2)$
7. $-a^2 - 2ab - b^2 = -(a+b)^2$
8. $4x^5 - 28x^4 + 49x^3 = x^3(2x-7)^2$
9. $8x^4y - 24x^3y^3 + 18x^2y^5 = 2x^2y(2x-3y^2)^2$
10. $(2x^2+3)(x+1)-(x^2+4)(x+1) = (x+1)^2(x-1)$

Oefening 3.1.9. Ontbind in factoren.

1. $(x+y)^2 - 16 = (x+y-4)(x+y+4)$
2. $(x+2y)^2 - 25y^2 = (x-3y)(x+7y)$
3. $(x+1)^2 - 6(x+1) + 9 = (x-2)^2$
4. $4(2x+3)^2 - 20(2x+3) + 25 = (4x+1)^2$
5. $9(5x-y)^2 - 16(3x+2y)^2 = (3x-11y)(27x+5y)$

Oefening 3.1.10. Ontbind in factoren. Geef voorrang aan de snelste ontbindingstechniek.

1. $9x^2 - 81x^2y^2 = 9x^2(1-3y)(1+3y)$
2. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x-2)(x+2)$
3. $-x^6 - 4x^4 - 4x^2 = -x^2(x^2+2)^2$
4. $a^2 - (a+b+c)^2 = -(b+c)(2a+b+c)$
5. $x^8 - 81 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)(x^4+9)$
6. $a^2(a^2-3) - 4(a^2-3) = (a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})(a-2)(a+2)$
7. $(2x-2)(3x+4)-(x-1)(2x-1) = (x-1)(4x+9)$
8. $-\sqrt{14x^3y} + \sqrt{21x^2y} + \sqrt{35x^2y^2} = \sqrt{7x^2y}(-\sqrt{2x}+\sqrt{3}+\sqrt{5y})$
9. $-18s^2t^3 + 84s^2t^2 - 98s^2t = -2s^2t(3t-7)^2$
10. $ac^2 + bd^2 - ad^2 - bc^2 = (a-b)(c-d)(c+d)$
11. $(3x+4)^2 - 8(3x+4) + 16 = 9x^2$
12. $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$
13. $2x^3 - 13x^2 - 6x + 39 = (2x-13)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
14. $(5x+1)^2 + 4(5x+1) = 5(5x+1)(x+1)$
15. $ax^2 + bx^2 - 4a - 4b = (a+b)(x-2)(x+2)$
16. $(4x^2+1)^2 - (12x-8)(4x^2+1) = (4x^2+1)(2x-3)^2$
17. $\sqrt{8} - ab + \sqrt{2}b - 2a = (b+2)(\sqrt{2}-a)$
18. $a^3 + b^3 + a^2b^2 + ab = (a+b^2)(a^2+b)$
19. $(a+2b)^2 - (2a-b)^2 = (3a+b)(-a+3b)$
20. $(a-b)^3 + (a+b)^3 = 2a(a^2+3b^2)$

3.1.C Oefeningen niveau 3

Oefening 3.1.11. Ontbind in factoren.

1. $\sqrt{18xy^2z^3} + \sqrt{32x^3y^2z} = \sqrt{2xy^2z}(3z^2 + 4x^2)$
2. $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = (\sqrt{3}x + y)^2$
3. $5y^2 + 2\sqrt{10}y + 2 = (\sqrt{5}y + \sqrt{2})^2$
4. $8a^2 - 4\sqrt{6}a + 3 = (2\sqrt{2}a - \sqrt{3})^2$
5. $\sqrt{5} - a - ab^2 + \sqrt{5}b^2 = -(a - \sqrt{5})(b^2 + 1)$

Oefening 3.1.12. Ontbind in factoren.

1. $a + b + 5c + 4a^2b + 4ab^2 + 20abc = (a + b + 5c)(1 + 4ab)$
2. $p^2+2pq-3pr-3p-6q+9r = (p+2q-3r)(p-3)$
3. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd = (a + b + c - d)(a + b - c + d)$
4. $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a + b + c)(a + b - c)$
5. $4x^2 + 9y^2 - 16z^2 - 12xy = (2x - 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)$
6. $x^2 - 4y^2 + 20y - 25 = (x + 2y - 5)(x - 2y + 5)$
7. $x^2 + y^2 + 2ax - 2ay - 2xy = (x - y)(x - y + 2a)$
8. $x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = (x - 1)^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$
9. $4a^2 + 4ab + b^2 - 2a - b = (2a + b)(2a + b - 1)$
10. $\sqrt{3}x^2z - y^5 + xy^2z - \sqrt{3}xy^3 = (xz - y^3)(\sqrt{3}x + y^2)$

Oefening 3.1.13. Ontbind in factoren.

1. $(7x^2 + 5x - 1)^2 - (x^2 - 5x - 1)^2 = 4x(3x + 5)(2x - 1)(2x + 1)$
2. $(x - 2)(x - 3) - (2 - x)(2x - 3) = 3(x - 2)^2$
3. $5x^2 - 4 = (\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2)$
4. $4x^2 - 9y^2 + 2x + 3y = (2x + 3y)(2x - 3y + 1)$
5. $7\sqrt{7}x^6+21x^4+3\sqrt{7}x^2+9 = (\sqrt{7}x^2+3)(7x^4+3)$
6. $(x + 1)^4 - (x + 1)^2 = (x + 1)^2(x + 2)x$
7. $x^3 - x^2 + \frac{x}{4} = \frac{1}{4}x(2x - 1)^2$
8. $a^6 - a^5 + \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{27}a^3 = a^3(a - \frac{1}{3})^3$
9. $(x - 2y)^2 - 9(x + 2y)^2 = -8(x + y)(x + 4y)$
10. $(2a^2+a+2)^2-(a^2-3a-2)^2 = a(3a-2)(a+2)^2$
11. $(a^3 - b^3) - (a - b)^3 = 3ab(a - b)$
12. $a^2 - 2a - 2b - b^2 = (a + b)(a - b - 2)$
13. $x^2 - 6x + 9 - 9y^2 = (x - 3y - 3)(x + 3y - 3)$
14. $4x^2 + 4a - a^2 - 4 = (2x + a - 2)(2x - a + 2)$
15. $(x - 3)^2 + 8(x^2 - 9) + 16(x + 3)^2 = (5x + 9)^2$

3.1.D Uitdagers

Oefening 3.1.14. Pas het principe uit het voorbeeld toe om de veeltermen te ontbinden.

Voorbeeld 3.1.4.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

1. $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

2. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

3. $x^4 - 3x^2 + 4 = (x^2 + \sqrt{7}x + 2)(x^2 - \sqrt{7}x + 2)$

Oefening 3.1.15. VWO De som van de kwadraten van de reële oplossingen van $x^{256} - 256^{32} = 0$ is:

- (A) 8
- (B) 128
- (C) 512
- (D) 65536
- (E) $2 \cdot 256^{32}$

Oefening 3.1.16. Finalevraag VWO 2012

Stel n een natuurlijk getal. Noem a het kleinste natuurlijk getal dat je van n moet aftrekken om een volkomen kwadraat te verkrijgen. Noem b het kleinste natuurlijk getal dat je bij n moet optellen om een volkomen kwadraat te verkrijgen. Bewijs dat $n - ab$ een volkomen kwadraat is.

4.1 Rationale vormen

Rationale vormen of gebroken lettervormen zijn "breuken met letters". Met de rekenregels voor breuken en het ontbinden in factoren kunnen deze uitdrukkingen vereenvoudigd worden. De belangrijkste rekentechnieken worden overlopen a.d.h.v enkele voorbeelden.

Voorbeeld 4.1.1. Vereenvoudigen

(a) Ontbind eerst de teller en de noemer in factoren.

(b) Deel vervolgens de teller en noemer door hun gemeenschappelijke factoren.

1. $\dfrac{a^2b}{5ab^3} = \dfrac{a}{5b^2}$

Uitwerking: $\dfrac{a^2b}{5ab^3} = \dfrac{a^{\cancel{2}}\cancel{b}}{5\cancel{a}b^{\cancel{3}}} = \dfrac{a}{5b^2}$

2. $\dfrac{a-b}{a^2-b^2} = \dfrac{1}{a+b}$

Uitwerking: $\dfrac{a-b}{a^2-b^2} = \dfrac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \dfrac{1}{a+b}$

3. $\dfrac{-x^3+x^2+2x-2}{x^2-1} = \dfrac{-x^2+2}{x+1}$

Uitwerking: $\dfrac{-x^3+x^2+2x-2}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(-x^2+2)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-x^2+2}{x+1}$

Voorbeeld 4.1.2. Optellen van twee rationale vormen

(a) Ontbind de noemers in factoren.

(b) Zet de breuken op gelijke noemer: dit is het kleinste gemeen veelvoud van de factoren in de noemers.

(c) Tel de tellers op en behoud de noemers. (De noemers blijven standaard ontbonden.)

(d) Vereenvoudig door gemeenschappelijke factoren te schrappen.

1. $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{3}{b-a} = \dfrac{-2}{a-b}$

Uitwerking: $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{3}{b-a} = \dfrac{1}{a-b} + \dfrac{-3}{a-b} = \dfrac{1-3}{a-b} = \dfrac{-2}{a-b}$

2. $\dfrac{-1}{x^2+2x} + \dfrac{2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x(x-2)}$

Uitwerking:

4.1 Rationale vormen

$$\begin{aligned}\frac{-1}{x^2+2x}+\frac{2}{x^2-4} &= \frac{-1}{x(x+2)}+\frac{2}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{-1}{x(x+2)}+\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{-1}{x(x+2)}+\frac{2x}{x(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{-x+2+2x}{x(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{x+2}{x(x-2)(x+2)}\\ &= \frac{1}{x(x-2)}\end{aligned}$$

Voorbeeld 4.1.3. Vermenigvuldigen van twee rationale vormen

(a) Vermenigvuldig de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

(b) Vergeet niet de uitkomst te vereenvoudigen.

1. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab}\cdot\dfrac{3a^2}{2a+2b}=\dfrac{3a(a+b)}{2(a-b)}$

Uitwerking: $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab}\cdot\dfrac{3a^2}{2a+2b}=\dfrac{(a^2+2ab+b^2)\cdot 3a^2}{(a^2-ab)\cdot(2a+2b)}=\dfrac{(a+b)^2\cdot 3a^2}{a(a-b)\cdot 2(a+b)}=\dfrac{3a(a+b)}{2(a-b)}$

Voorbeeld 4.1.4. Delen van twee rationale vormen.

(a) Maar gebruik van de rekenregel $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$. Dit mag enkel wanneer de teller en noemer allebei een breuk zijn.

1. $\dfrac{a+3}{1+\frac{a}{a-1}}=\dfrac{(a+3)(a-1)}{2a-1}$

Uitwerking: $\dfrac{a+3}{1+\frac{a}{a-1}}=\dfrac{a+3}{\frac{a-1+a}{a-1}}=\dfrac{a+3}{\frac{2a-1}{a-1}}=(a+3)\cdot\dfrac{a-1}{2a-1}=\dfrac{(a+3)(a-1)}{2a-1}$

4.1.A Oefeningen niveau 1

Oefening 4.1.1. Vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$
2. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $\dfrac{a^2-9}{a^2-6a+9} = \dfrac{a+3}{a-3}$
4. $\dfrac{x^4-a^4}{x^2-a^2} = x^2+a^2$
5. $\dfrac{2x^2-5x+3}{-4x^2+8x-3} = \dfrac{1-x}{2x-1}$

Oefening 4.1.2. Pas eerst (kruisgewijs) vereenvoudigen toe vooraleer de breuken te vermenigvuldigen.

1. $\dfrac{3(a-b)}{a(a+b)} \cdot \dfrac{a^2}{9(a-b)} = \dfrac{a}{3a+3b}$
2. $\dfrac{(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} \cdot \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+1}{x-2}$
3. $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+3)} \cdot \dfrac{x^2}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2-9}$
4. $\dfrac{4(x-2)}{10(x+2)^2} \cdot \dfrac{15(x+2)}{2(x-1)} = \dfrac{x-2}{x^2+x-2}$
5. $\dfrac{6a^3}{a+4} \cdot \dfrac{(a+4)^2}{24a^2} = \dfrac{1}{4}a(a+4)$

4.1.B Oefeningen niveau 2

4.1.B Oefeningen niveau 2

Oefening 4.1.3. Vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{(b-a)^3}{a^2-b^2} = \dfrac{-(a-b)^2}{a+b}$
2. $\dfrac{x^2+1}{x^4+2x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$
3. $\dfrac{4x^2-12xy+9y^2}{4x^2-9y^2} = \dfrac{2x-3y}{2x+3y}$
4. $\dfrac{(2x-y)^2-(x+3y)^2}{(3x-y)^2-(2x+3y)^2} = \dfrac{3x+2y}{5x+2y}$
5. $\dfrac{a^2b+ac-ab^2c-bc^2}{a^2c-ab-abc^2+b^2c} = \dfrac{ab+c}{ac-b}$
6. $\dfrac{x^3-8}{2x^3+2x^2-8x-8} = \dfrac{x^2+2x+4}{2(x+2)(x+1)}$
7. $\dfrac{(x-3)(x-2)-2}{x-1} = x-4$
8. $\dfrac{(x-2)(x+5)+(x+1)}{x-2} = \dfrac{x^2+4x-9}{x-2}$
9. $\dfrac{2a(a+2)-(a^2-a-6)}{(a+2)^3} = \dfrac{a+3}{(a+2)^2}$
10. $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{-2x^3-8x^2-10x-4} = \dfrac{-(x+1)}{2(x+2)}$

Oefening 4.1.4. Vereenvoudig indien mogelijk. Zonder eerst in teller en noemer de gemeenschappelijke factoren af.

1. $\dfrac{3x^4-3x^2}{x^4+x^2} = \dfrac{3(x^2-1)}{x^2+1}$
2. $\dfrac{a^2-ab}{b^2-ab} = -\dfrac{a}{b}$
3. $\dfrac{a^2-a^6}{-a^7+a^5} = \dfrac{a^2+1}{a^3}$
4. $\dfrac{2(x-2)+(x-2)x^2}{x-2} = x^2+2$
5. $\dfrac{(4a-1)b+(1-4a)c}{b-c} = 4a-1$
6. $\dfrac{x^3+6x^2+9x}{x^3-9x} = \dfrac{x+3}{x-3}$
7. $\dfrac{2x-1+(2x-1)^2}{(2x-1)^3} = \dfrac{2x}{(2x-1)^2}$
8. $-\dfrac{(x-1)^3-3(x+1)(1-x)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{2(x+2)}{(x-1)^4}$
9. $\dfrac{2a(a^2+3)-a^2\cdot 2a}{a(a^2+3)^2} = \dfrac{6}{(a^2+3)^2}$
10. $\dfrac{ax+bx+ay+by+az+bz}{a+b} = x+y+z$

Oefening 4.1.5. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2x+1}{x-2} = \dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)(x+1)}$
2. $\dfrac{2x+3}{2x-3}+\dfrac{7}{x} = \dfrac{17a+3}{3(a+2)}$
3. $\dfrac{4a+1}{a+2}+\dfrac{5a}{3(a+2)} = \dfrac{2x^2+17x-21}{x(2x-3)}$
4. $\dfrac{4x+1}{2x-3}+\dfrac{2x+4}{3-2x} = 1$
5. $1-\dfrac{x-2}{3x+7} = \dfrac{2x+9}{3x+7}$
6. $\dfrac{a}{5}-\dfrac{a+2}{3a} = \dfrac{3a^2-5a-10}{15a}$
7. $\dfrac{2x-1}{x-5}+\dfrac{x+5}{2x+1} = \dfrac{5x^2-26}{(x-5)(2x+1)}$
8. $\dfrac{x-4}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-4} = \dfrac{-3(2x-5)}{(x-4)(x-1)}$
9. $\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{x-8}{x-4} = 2$
10. $\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{2a-1}{2-a} = \dfrac{-(a-1)}{a-2}$

Oefening 4.1.6. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{2a^2}{(a-1)(a+1)}-\dfrac{a^2+1}{a^2-1} = 1$

4.1.B Oefeningen niveau 2

2. $\dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(b-a)^2} = \dfrac{2}{(a-b)^2}$

3. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x+1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{2}{x-3}$

4. $\dfrac{8}{(2+x)(x-2)} + \dfrac{2}{2-x} = \dfrac{-2}{x+2}$

5. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2}{x+1}$

6. $\dfrac{4}{2+x} - \dfrac{8}{4-x^2} + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{2(3x+2)}{(x-2)(x+2)}$

7. $\dfrac{x-1}{2x-1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x}{1-2x} = \dfrac{x+1}{x-1}$

8. $\dfrac{5x-9}{(x+2)(x-3)} + \dfrac{x-3}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{2x(3x-5)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

9. $\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)} - \dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{-4}{(x-3)(x-1)}$

10. $\dfrac{2x-3}{(2x-1)(x-1)} + \dfrac{x+3}{(2x-1)(2x+3)} = \dfrac{5x^2+2x-12}{(x-1)(2x-1)(2x+3)}$

Oefening 4.1.7. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{x+6}{x^2-16} - \dfrac{x+1}{x^2-4x} = \dfrac{1}{x(x+4)}$

2. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{4}{x^2-1} = 2$

3. $\dfrac{4x}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-5x+6} = \dfrac{2(2x-1)}{(x-3)(x+2)}$

4. $\dfrac{3}{x^3-1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{-(2x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$

5. $\dfrac{1}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{x^3-4x^2+5x-2} = \dfrac{x(x-3)}{(x-2)(x+1)(x^2-2x+1)}$

6. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2} - \dfrac{a^2b+ab^2}{a^2+ab} = \dfrac{a^2}{a+b}$

7. $\dfrac{a^4}{a^4-b^4} + \dfrac{1}{a^2-b^2-1} = \dfrac{a^2+b^2+b^4}{a^4-b^4}$

8. $\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{3xy}{x^3-y^3} = \dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$

9. $\dfrac{2a}{a^3+a^2b-ab^2-b^3} - \dfrac{1}{a^2-b^2} = \dfrac{1}{(a+b)^2}$

10. $\dfrac{1}{a^2-a} - \dfrac{1}{a^2+a} + \dfrac{2a^5}{a^2-a^4} = \dfrac{-2(a^2+1)}{a}$

4.1.B Oefeningen niveau 2

Oefening 4.1.8. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{x^2-x}{x-1}\cdot\dfrac{5x-5}{1-x}=-5x$
2. $\dfrac{x^3-8}{x^3+8}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}$
3. $\dfrac{xy+y^2}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{x^2-xy}{(x+y)^2}=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$
4. $\dfrac{2a^2+2ab}{ab-b^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{2a}{b}$
5. $\dfrac{x^2+3x-10}{2x}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{2}(x+5)$

Oefening 4.1.9. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\left(1-\dfrac{1}{x-2}\right)\left(x-3+\dfrac{1}{x-3}\right)=\dfrac{x^2-6x+10}{x-2}$
2. $\left(x-\dfrac{x+2}{x}\right)\left(5-\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{(x-2)(5x+4)}{x}$
3. $\left(x-\dfrac{x-y}{1+xy}\right)\left(x-\dfrac{2}{x+1}\right)=\dfrac{(x^2+1)(x^2+x-2)y}{(x+1)(xy+1)}$
4. $\left(3-\dfrac{1}{a+2}\right)\left(a+1+\dfrac{2a+1}{a-1}\right)=\dfrac{a(3a+5)}{a-1}$
5. $\left(\dfrac{b+a}{b+2a}-\dfrac{b-a}{b-2a}\right)\left(\dfrac{b^2}{a^2}-4\right)=\dfrac{-2b}{a}$

Oefening 4.1.10. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{\frac{5x^2-5}{x^2}}{\frac{6x+6}{x^3}}=\dfrac{5x(x-1)}{6}$
2. $\dfrac{\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5}}{\frac{x^2+4x+4}{x^2+7x+10}}=\dfrac{x+3}{x+1}$
3. $\dfrac{3+\frac{1}{x-2}}{3-\frac{1}{x-5}}=\dfrac{(x-5)(3x-5)}{(x-2)(3x-16)}$
4. $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
5. $\dfrac{\frac{1}{a-b}+1}{\frac{1}{a-b}-1}=\dfrac{-(a-b+1)}{a-b-1}$
6. $\dfrac{(x-3)^2}{x}\div(x^2-9)=\dfrac{x-3}{x(x+3)}$
7. $\dfrac{5+\frac{3}{x+1}}{5}=\dfrac{5x+8}{5(x+1)}$
8. $\dfrac{x+2}{\frac{3}{x+4}-2}=\dfrac{-(x+2)(x+4)}{2x+5}$
9. $\dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\cdot\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right)=a+b$
10. $\dfrac{1}{1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}\cdot\dfrac{(x^2+1)^2}{(x-1)^2}=(x+1)^2$

Oefening 4.1.11. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1}=\dfrac{ab}{a+b}$
2. $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{b-a}\right)^{-1}=\dfrac{a-b}{a+b}$
3. $\left(y^{-2}-x^{-2}\right)\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)^{-1}=\dfrac{x+y}{xy}$

Oefening 4.1.12. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{(a-1)^3-(a+1)(a-1)^2}{(a-1)^6}=\dfrac{-2}{(a-1)^4}$
2. $\dfrac{3x+3}{x^2-2x}-\dfrac{2x+2}{x^2-4}=\dfrac{(x+1)(x+6)}{x(x^2-4)}$

4.1.B Oefeningen niveau 2

3. $\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{y}{1-\frac{y}{x}}=\frac{x+y}{xy}$

4. $\frac{1+t}{1-t^2}+\frac{1+t}{(1-t)^2}=\frac{2}{(1-t)^2}$

5. $\frac{x^2-y^2+x+y}{x+y}=x-y+1$

6. $\frac{1}{y}-y\ /\ 1-\frac{1}{y}=-(y+1)$

7. $\frac{1+x}{1+2x+x^2}-\frac{1+x}{1+x^3}=\frac{x(x-2)}{x^3+1}$

8. $\frac{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}}{x+2}=\frac{1}{x-2}$

9. $\frac{x^2-4}{\frac{(x-2)^2}{x+2}}=\frac{(x+2)^2}{x-2}$

10. $\frac{1}{\frac{a-b}{ab}}\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)=-(a+b)$

11. $\frac{1}{a^2-2a}+5+\frac{6}{2-a}=\frac{5a^2-16a+1}{a^2-2a}$

12. $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$

13. $\frac{x+2y}{\frac{1}{x}-\frac{2}{y}}=\frac{xy(x+2y)}{y-2x}$

14. $\frac{(x-a)(x^2+2ax+a^2)}{x^3+a^3}\cdot\frac{x^2-ax+a^2}{x^3-a^3}=\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$

15. $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{(x+y)^3}$

16. $\left(y^{-2}-x^{-2}\right)\cdot\frac{y}{1-yx^{-1}}=\frac{x+y}{xy}$

17. $\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{2x-1}{x^2(x-2)}$

18. $\frac{2x+3}{x^2-7x+12}-\frac{2}{x-3}=\frac{11}{(x-4)(x-3)}$

19. $\frac{2x^2-x-6}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{-x^2(2x+3)}{x+2}$

20. $\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{-x(x-1)}{x-3}$

4.1.C Oefeningen niveau 3

Oefening 4.1.13. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $1-\dfrac{a-b\cdot\frac{a-b}{a+b}}{b-a\cdot\frac{a+b}{a-b}}=\dfrac{2a}{a+b}$

2. $\dfrac{\left(-\left(x+\frac{a^2}{x+a}\right)\left(a+\frac{x^2}{a-x}\right)\right)}{x^6-a^6}\cdot(x^2-a^2)^2=1$

3. $\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{b^3-a^3}-\dfrac{b}{(a+b)^2}=\dfrac{2a^2b^2}{(a-b)(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}$

4. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3-b^3}+\dfrac{4ab^4}{a^6-b^6}=\dfrac{2a}{a^2-b^2}$

5. $\left(x+\dfrac{1}{x^2}+3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right):\left(\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\right)=x(x+1)$

6. $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+2}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-2}:\dfrac{\frac{a+2b}{a-2b}+\frac{a-2b}{a+2b}+2}{\frac{a+2b}{a-2b}+\frac{a-2b}{a+2b}-2}=4$

4.1.D Uitdagers

Oefening 4.1.14. Bereken de waarde van de volgende oneindig doorlopende breuk. We noemen dit een kettingbreuk.

1. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$