

Intro: een nieuwe soort getallen?

Doorheen de geschiedenis van de wiskunde hebben nieuwe getallen een belangrijke rol gespeeld. Uit het tellen komen de meest eenvoudige getallen voort: 1 appel, 2 appels, 3 appels, ... Dit zijn de natuurlijke getallen, die genoteerd worden met de letter $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$.

Met deze getallen kan je op verschillende manieren 'nieuwe getallen' maken. Door negatieve getallen toe te voegen wordt de verzameling getallen groter. Dit zijn de gehele getallen, die genoteerd worden met de letter $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +5, -5, \dots\}$.

Één van de redenen waarom wiskundige nieuwe getallen invoeren, ligt in het oplossen van vergelijkingen. De vergelijking $x + 7 = 0$ heeft geen oplossing in de natuurlijke getallen. Zonder het gehele getal $x = -7$ kan je deze vergelijking niet oplossen.

Om even over na te denken ...

De Oude Grieken hebben negatieve getallen nooit aanvaard. Voor hen is een getal altijd een hoeveelheid of een lengte, en dus positief. **Ben jij akkoord met de Oude Grieken?**

Bestaan negatieve getallen wel 'écht'?

Je hebt 1 appel, 2 appels, 3 appels, ... Maar wat is precies '-1 appel'?

Aan welke vereisten moet iets voldoen voordat jij het 'een getal' zou willen noemen?

Breuken leiden tot een volgende uitbreiding van de getallen. Die nieuwe getallen worden de rationale getallen genoemd, en genoteerd met de letter $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Voorbeelden zijn $\frac{2}{3}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{1}{1}$ en $\frac{0}{3}$. Ook rationale getallen zijn nuttig om vergelijkingen op te lossen, want de vergelijking $3x + 4 = 0$ heeft geen oplossing in de gehele getallen \mathbb{Z} . Zonder de breuk $x = \frac{-4}{3}$ is deze vergelijking niet oplosbaar.

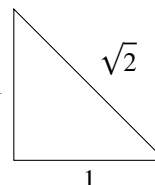
Je merkt al snel dat je nog niet 'genoeg' getallen hebt. De stelling van Pythagoras leert ons dat de schuine zijde van de gegeven driehoek lengte $\sqrt{2}$ heeft.

Met een kort bewijs kan men aantonen dat $\sqrt{2}$ niet in de verzameling rationale getallen zit, dus dat

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797 \dots$$

niet te schrijven is als een breuk!. Deze getallen worden *irrationaal* genoemd en hebben altijd oneindig veel cijfers na de komma. Andere voorbeelden zijn

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375 \dots, \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ en } \pi^2$$



Ook irrationale getallen zijn nuttig om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking $x^2 + 2 = 4$ heeft immers geen oplossing in de rationale getallen \mathbb{Q} . Zonder het irrationale getal $x = \sqrt{2}$ kan je deze vergelijking niet oplossen. Als de irrationale getallen worden toegevoegd aan de rationale getallen \mathbb{Q} , bekom je de reële getallen \mathbb{R} . De reële getallen vormen een rechte waarbij met elk punt met een reëel getal overeenkomt.

Om even over na te denken ...

Bestaan er volgens jou nog andere soorten getallen?

- Zijn er vergelijkingen die je niet kan oplossen met de reële getallen \mathbb{R} ?
- Zou je de reële rechte nog kunnen 'uitbreiden' ?

Intro: een nieuwe soort getallen?

0.1 Op zoek naar nieuwe getallen: een complexe geschiedenis...

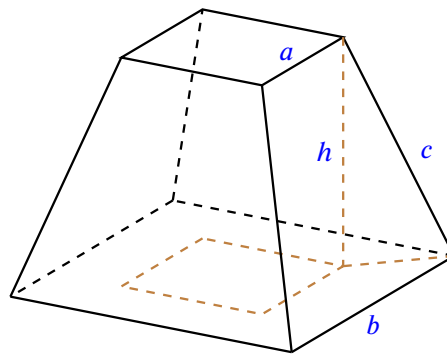
Oefening 1. Heron van Alexandrië

De Griekse wiskundige Heron van Alexandrië zocht in de eerste eeuw v. Chr de hoogte h van een afgeplatte piramide met basis b , afgeplatte top a en schuine ribbe c .

a) Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat de hoogte h wordt gegeven door:

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{b-a}{2}}$$

b) Heron van Alexandrië berekende de hoogte van de afgeplatte piramide met volgende afmetingen: $b = 28$, $a = 4$ en $c = 15$. **Ga Heron van Alexandrië achterna en voer deze berekening uit, valt er je iets op aan het eindresultaat?**



Figuur 1: Heron van Alexandrië en zijn afgeplatte piramide.

Om even over na te denken ...

- Wat zou $\sqrt{-4}$ kunnen betekenen?
- Ken je een getal dat als kwadraat -4 heeft?
- Zijn er vergelijkingen die $\sqrt{-4}$ als oplossing hebben?

Heron van Alexandrië schreef als oplossing de positieve wortel $\sqrt{63}$ in zijn schrift. Waarom hij dat deed is onduidelijk. De meest voor de hand liggende verklaring is dat hij deze negatieve wortel niet kon aanvaarden.

In de 9de eeuw schreef de Indische wiskundige Mahaviracarya in zijn werk *Ganita-Sara-Sangraha* over wortels van negatieve getallen het volgende¹

'In de natuur der dingen is een negatieve hoeveelheid geen kwadraat, en het heeft dus geen vierkantswortel'.

Het duurde tot de 16de eeuw voordat negatieve wortels opnieuw opdoken in de wiskunde, op het moment dat de Italiaanse wiskunde Cardano het volgende probleem probeerde op te lossen:

Oefening 2. Gerolamo Cardano

Zoek 2 getallen waarvan de som gelijk is aan 10; en het product gelijk is aan 40. In symbolen is dit

¹David Eugene Smith, *The Mathematics of Mahāvīrācārya with English Translations and Notes*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1913, volume 19, p312. Eigen vertaling uit het Engels.

Intro: een nieuwe soort getallen?

het stelsel $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$ waarbij x en y getallen zijn.

Cardano vond een oplossing voor dit probleem omdat hij rekende met negatieve wortels.

Durf jij Cardano achterna om dit probleem op te lossen?

Over zijn berekening schrijft Cardano zelf het volgende:

“Putting aside the mental tortures involved, multiply $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$... Hence this product is 40... This is truly sophisticated.”

Opmerking 1. Cardano heeft goede redenen om zijn negatieve wortels te omschrijven als ‘mentale martelingen’. De rekenregel $\sqrt{\square\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square}$ zorgt meteen voor een tegenstrijdigheid:

We schrijven $\sqrt{\square}$ enkel voor $\square \in \mathbb{R}$.

Vlugge Vraag

Geef een voorbeeld van deze tegenstrijdigheid.

Om deze tegenstrijdige rekenregels te vermijden, voerde Euler een symbool i met als eigenschap dat $i^2 = -1$. Het gebruik van negatieve wortels kan nu altijd vermeden worden:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = 3i$$

René Descartes, bekend van het cartesiaans assenstelsel, is deze getallen tegengekomen bij het oplossen van meetkundige problemen. Hij schreef hierover²:

‘...on ne fçaurait les rendre autres qu’ imaginaires.’

‘...we kunnen ze niet anders dan denkbeeldig maken.’

Hierdoor is men deze nieuwe getallen ‘imaginaire getallen’ gaan noemen.



Figuur 2: René Descartes

Om deze getallen beter te begrijpen zijn wiskundigen ze in een vlak beginnen voorstellen. Op de reële rechte stelt elk punt een reëel getal voor. In het **complexe vlak** zal elk punt een complex getal voorstellen.

De Ierse wiskundige William Rowan Hamilton schreef hierover in 1837 het volgende³:

²Descartes, René. *La géométrie*. 1637, p47, Eigen vertaling uit het Frans.

³Hamilton, William Rowan. *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time*, Irish Acad. Trans. **XVII** (1837), 519–422.

Intro: een nieuwe soort getallen?



Figuur 3: William Rowan Hamilton

“...be concisely denoted as follows, $\sqrt{-1} = (0, 1)$. In the theory of single numbers, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple, namely the principal square-root of the couple $(-1, 0)$.”

Uit het citaat blijkt dat in het vlak deze nieuwe getallen veel minder 'denkbeeldig' zijn dan wiskundigen lang gedacht hebben. Het nieuwe symbool i waarvoor $i^2 = -1$, blijkt simpelweg het punt $(0, 1)$ te zijn. Omdat deze nieuwe getallen worden samengesteld uit het nieuwe symbool i en 2 reële getallen, kregen ze ook de naam 'complex'.

Vandaag worden deze nieuwe 'complexe' getallen gebruikt bij het programmeren van computergames, bij het berekenen van elektronische schakelingen en in de kwantummechanica.