De vermenigvuldiging in polaire vorm

Het optellen van complexe getallen is erg eenvoudig in de cartesische schrijfwijze, het correspondeert immers met het optellen van vectoren. Bij de vermenigvuldigen van complexe getallen is de polaire schrijfwijze erg eenvoudig, ook deze bewerking correspondeert met een meetkundige operatie in het complexe vlak. Zij $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ complexe getallen. Met behulp van de som- en verschilformules van goniometrische getallen levert een rechtstreekse berekening:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\,, \end{aligned}$$

De moduli r_i worden vermenigvuldigd, en de argumenten θ_i worden opgeteld.

Eigenschap 1 (Vermenigvuldiging van twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze)**.**

De *modulus* van het product van twee complexe getallen is het *product van de moduli* van die getallen.

Het *argument* van het product van twee complexe getallen is de *som van de argumenten* van die getallen.

Voor $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ wordt het product gegeven door

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

Oefening 1. Gegeven zijn de complexe getallen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_2 &= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

Bereken algebraïsch de volgende complexe getallen en geef het resultaat in cartesische en polaire vorm.

1. $z_1 \cdot z_2$

2. $(z_1)^2$

3. $\dfrac{z_2}{z_1}$

Uitweiding 1 (Vermenigvuldiging van 2 complexe getallen grafisch uitgelegd)**.** We kunnen de vermenigvuldiging met een complex getal ook zien als een actie die we doen op punten in het vlak. Als we een bepaald complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ fixeren, en eender welk complex getal vermenigvuldigen met die z, dan tellen we steeds θ bij het argument van het complex getal op, en vermenigvuldigen we de modulus van dat complex getal steeds met r.

Eigenschap 2 (Vermenigvuldiging met een complex getal in goniometrische schrijfwijze $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$)**.**

Vermenigvuldigen met $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ betekent *roteren* over een hoek θ en afstanden en lengtes *herschalen* met een factor r.

Je kan experimenteren met deze voorstelling van de vermenigvuldiging door in onderstaande applet de complexe getallen z_1 en z_2 te verslepen, en dan via de vermenigvuldig-knop te zien hoe vermenigvuldigen met $z_2 = (r, \theta)$ inderdaad kan beschouwd worden als een *rotatie* over een hoek θ gevolgd door een *herschaling* met een factor r.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/i0Lbx90s

Oefening 2. Teken devolgende complexe getallen z_1 en z_2 als punten van het complexe vlak. Bepaal zonder te rekenen waar haar het product $z_1 z_2$ ligt.

1. $z_1 = 1 + 1$ $z_2 = i$

2. $z_1 = 5$ $z_2 = i - 1$

3. $z_1 = 2 + 2i$ $z_2 = -2 - 2i$