

Complexe getallen (algebraïsch)

Met een nieuwe symbool i worden er nieuwe getallen ingevoerd. Er ontstaan combinaties als $2i$ en $i + 1$, die we **complexe getallen** noemen, niet omdat ze ingewikkeld zijn, maar omdat ze zijn *samengesteld* uit reële getallen en het nieuwe symbool i .

Definitie 1 (Complex getal).

Een **complex getal** is een uitdrukking van de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

Het symbool i waarvoor $i^2 = -1$ noemen we de **imaginaire eenheid**.

De **verzameling complexe getallen** noteren we met $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

Voor een complex getal $z = a + bi$ noemen we:

$$a = \operatorname{Re}(a + bi) = \operatorname{Re}(z) \text{ het reëel deel}$$

$$b = \operatorname{Im}(a + bi) = \operatorname{Im}(z) \text{ het imaginair deel.}$$

Als $\operatorname{Im}(z) = b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal**

Als $\operatorname{Re}(z) = a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Twee complexe getallen zijn **gelijk** indien ze dezelfde reële en imaginaire delen hebben:

$$\begin{aligned} z = w &\iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w) \text{ en } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w) \\ a + bi = c + di &\iff a = c \text{ en } b = d \end{aligned}$$

Complexe getallen worden dikwijls met de letters z of w genoteerd, net zoals we voor een natuurlijk getal n gebruiken of voor functies f, g en h .

Opmerking 1 (Gelijkheid van complexe getallen).

Het kan overbodig lijken om te vermelden wanneer twee complexe getallen $z = a + bi$ en $w = c + di$ aan elkaar gelijk zijn. Merk op dat een gelijkaardige regel voor breuken *niet* geldt: als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelijk zijn hoeft niet te gelden dat $a = c$ en $b = d$. De breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ zijn immers gelijk, maar hun tellers en noemers toch zijn verschillend.

Vlugges Vraag:

Zijn $\frac{3}{5}$, 5 , π en 0 voorbeelden van complexe getallen?

Voorbeeld 1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$	z	$\operatorname{Re}(z)$	$\operatorname{Im}(z)$
$2 + 3i$	2	3	$1 + \pi$	$1 + \pi$	0
$5 - 6i$	5	-6	42	42	0
$1 + i\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$42i$	0	42
$\frac{1 - i\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$5i + 7$	7	5
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$2 + 5i + \pi$	$2 + \pi$	5

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 1. Geef telkens het reëel en het imaginair deel van de volgende complexe getallen.

1. $8 + 3i$ heeft reëel deel en imaginair deel

2. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ heeft reëel deel en imaginair deel

Complexe getallen (algebraïsch)

3. $7i$ heeft reëel deel en imaginair deel
4. 5 heeft reëel deel en imaginair deel
5. $\frac{1+2i}{3}$ heeft reëel deel en imaginair deel
6. i heeft reëel deel en imaginair deel
7. $\frac{9+3i}{3}$ heeft reëel deel en imaginair deel
8. $\pi + i + e$ heeft reëel deel en imaginair deel
9. 0 heeft reëel deel en imaginair deel
10. $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$ heeft reëel deel en imaginair deel

Oefening 2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk, door gebruik te maken van de gelijkheid $i^2 = -1$.

1. $i^2 = \dots\dots$
2. $i^5 = \dots\dots$
3. $-i^3 = \dots\dots$
4. $i^4 = \dots\dots$
5. $-i^4 = \dots\dots$
6. $i^{10} = \dots\dots$
7. $i^{11} = \dots\dots$
8. $i^{12} = \dots\dots$
9. $-i^2 = \dots\dots$
10. $i^{2028} = \dots\dots$