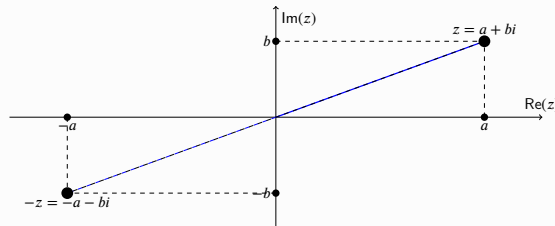


De complex toegevoegde van een complex getal

Uitweiding 1 (Het tegengestelde van een reëel getal). Het tegengestelde $-a$ van een reëel getal a is een erg eenvoudig begrip, want $-a$ is 'het getal a met het omgekeerde teken'. Op de getallenrechte kan je $-a$ beschouwen als het spiegelbeeld van a rond de oorsprong.

Het tegengestelde $-z$ van een complex getal kan onmiddellijk en zonder enig probleem worden gedefinieerd: als $z = a + bi$, dan is $-z = -(a + bi) = -a - bi$, en in het complexe vlak is $-z$ het spiegelbeeld van z door de oorsprong:



Complexe getallen kan je spiegelen rond de x -as, en dat zal blijken een bijzonder nuttige operatie te zijn, die geen equivalent heeft voor een reëel getal. Terwijl men bij spiegelen door de oorsprong spreekt over het *tegengestelde* $-z$, noemt men de over de x -as gespiegelde het **complex toegevoegde** \bar{z} .

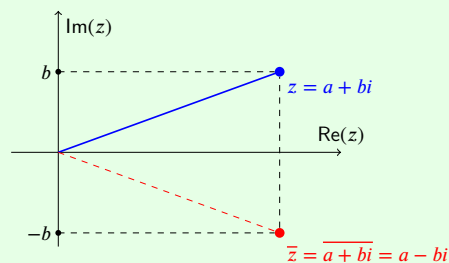
Definitie 1 (Complex toegevoegde van een complex getal).

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd \bar{z} , is het *complexe* getal

$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{a + bi} \stackrel{\text{def}}{=} a - bi$$

$$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i.$$

We noemen z en \bar{z} **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x -as.



Vlugge Vraag:

Waar in het complex vlak ligt het complex toegevoegde van de zuiver reële getallen?

Voorbeeld 1.

1. $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

3. $\overline{-3 - 4i} = -3 + 4i$

5. $\bar{i} = -i$

2. $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$

4. $\overline{-3} = -3$

6. $\overline{-i} = i$

Volgende eigenschap, waarvan het bewijs een oefening is, geeft aan dat complex toevoegen compatibel is met optelling en vermenigvuldiging.

Eigenschap 1 (Eigenschappen van complex toevoegen). Voor complexe getallen z en w geldt

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{(2 + 3i) + (4 + 5i)} = 6 - 8i = \overline{2 + 3i} + \overline{4 + 5i}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{(2 + 3i) \cdot (4 + 5i)} = -7 - 22i = \overline{2 + 3i} \cdot \overline{4 + 5i}$$

De complex toegevoegde van een complex getal

Oefening 1. Bereken voor een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \bar{z} = 2a$

2. $z - \bar{z} = 2bi$

3. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Uitwerking:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$

Uitwerking:

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$$

Uitwerking:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond:

Eigenschap 2 (Eigenschappen van complex toevoegen). Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt

$$\overline{\bar{z}} = \overline{(\bar{z})} = z$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$\overline{(2 + 3i)} = \bar{2 - 3i} = 2 + 3i$$

$$2 + 3i + \overline{2 + 3i} = 2 + 3i + 2 - 3i = 4 = 2\operatorname{Re}(2 + 3i)$$

$$2 + 3i - \overline{2 + 3i} = 2 + 3i - 2 + 3i = 6i = 2i\operatorname{Im}(2 + 3i)$$

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13 = |2 + 3i|^2$$

Zowel de som als het product van een getal z en zijn complex toegevoegde \bar{z} zijn steeds *reëel*, en dat zal een manier opleveren om het inverse z^{-1} te berekenen, en dus het quotiënt van twee complexe getallen.