WISKUNDE.OPMAAT.ORG

Xoverzicht: Complexe getallen

(Versie 2025/02/24H.39)

Inhoudsopgave

1.1 Complexe getallen: overzicht

1.1.1 Inleidingen

(a) Standaard

(b) Vergelijkingen oplossen

(c) Genetisch (i.e. historisch)

(d) Meetkundig

(e) Onderzoeksmethode

1.1.2 Definitie, basiseigenschappen en basisoefeningen

(a) Definitie (zonder meetkunde)

(b) Het complexe vlak

(c) Definitie (nieuwe interpretatie van het vlak)

(d) Werkblad: exploratie deling van complexe getallen

(e) Eigenschappen (ihb deling!)

(f) tweedegraadsvergelijkingen

1.1.3 Uitbreiding?

(a) Norm

(b) Complex toegevoegde

1.1.4 Goniometrische vorm

(a) Goniometrische vorm

(b) N-de machtswortels

(c) (U) Eulervorm

(d) (U) Complexe tweededraagsvergelijkingen

1.1.5 Oefeningen

1.1.6 Extra/Uitbreidingen

(a) Quaternionen

1.1.7 Toepassingen

(a) Fractalen

(b) Golven

(c) Computers, elektriciteit, ... ?

1.2 Wiskunde Op Maat

Dit handboek over complexe getallen is het eerste deel van een reeks die hopelijk ooit de volledige leerstof van minstens de derde graad van het Vlaamse secundair onderwijs zal omvatten.

De belangrijkste kenmerken zijn

(a) **kwaliteitsvol leermateriaal**, met duidelijke en exacte formuleringen, verhelderende en motiverende voorbeelden en met zowel voldoende eenvoudige inoefen-oefeningen als uitdagende toepassingen.

(b) een **minimale impact op de lessen**: er wordt materiaal aangeboden dat kan dienen als referentie, studiemateriaal, oefeningen of werkbladen, maar de leerkracht kiest hoe hij wat al dan niet gebruikt. In het bijzonder is er een klassiek handboek, dat zowel in PDF als uitgeprint kan worden aangeboden, eventueel in kleine onderdelen naarmate de lessen vorderen. Bovendien is er een website met hetzelfde materiaal, eventueel uitgebreid met extra voorbeelden, oefeningen of kennisclips.

(c) geschreven in **LaTeX**, de lingua franca waarin wiskundige teksten worden geschreven. Het systeem is vrij beschikbaar, is erg krachtig, en wordt over heel de wereld door ontelbare wiskundigen en leerkrachten wiskunde gebruikt. Er is een enorme online community die de technologie verder ontwikkelt en al het materiaal vrij ter beschikking stelt.

(d) van dezelfde LaTeX-broncode worden zowel hoogwaardige PDF-bestanden gemaakt als **interactieve webpagina's**. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van Ximera, oorspronkelijk ontwikkeld aan Ohio State University en sinds 2019 aan de KU Leuven verder uitgebreid.

(e) de **broncode** van het hele handboek, inclusief de oefeningen, is vrij beschikbaar. Dit laat elke geïnteresseerde leerkracht met voldoende LaTeX kennis toe om het handboek volledig naar eigen smaak en voorkeuren aan te passen, in te perken of uit te breiden.

(f) het volledige leerplan zal enkel kunnen gerealiseerd worden als er een actieve community ontstaat van gemotiveerde leerkrachten die materiaal ontwikkelen en ter beschikking willen stellen van hun collega's. Zoals gebruikelijk in succesvolle open source projecten, zorgt de structuur van deze community voor een automatische kwaliteitscontrole. Er zal geen wildgroei ontstaan van ongerelateerde oefeningen en werkbladen met diverse notaties en onduidelijke verwachte voorkennis.

(g) de broncode is erg **modulair opgebouwd**, zodat van hetzelfde handboek automatisch verschillende versies worden gegenereerd, zogenaamde 'flavours', met meer of minder basisoefeningen, al dan niet historische noten of uitdagende denkvragen, meer of minder bewijzen en meer of minder uitgebreide toepassingen. Om hiervan gebruik te maken is geen enkele technische kennis vereist. Hierdoor ontstaat een **handboek op maat van de leerkracht**, die precies kan aangeven welke bewijzen, voorbeelden en oefeningen moeten worden opgenomen.

(h) zowel de PDF als de website kunnen hyperlinks bevatten naar meer voorbeelden, meer oefeningen, een alternatieve uitleg, een extra kennisclip of geogebra applet. Hierdoor ontstaat een **handboek op maat van elke leerling**, die voor de moeilijke onderdelen steeds extra materiaal vindt.

(i) het gebruik van LaTeX garandeert een grote duurzaamheid, minstens wat het genereren van kwaliteitsvolle PDF's betreft: het is hoogst waarschijnlijk dan binnen 10, 20 en 30 jaar dezelfde broncode nog steeds dezelfde PDF zal genereren (net zoals vandaag de meeste LaTeX bestanden van de jaren 1980 nog perfect bruikbaar zijn, hoewel ze natuurlijk geen gebruik maken van de ontelbare nieuwigheden die sinds die tijd zijn toegevoegd). De webtechnologie zal natuurlijk sneller evolueren, maar het is erg aannemelijk dat in toekomst van de huidige LaTeX-code automatisch of semi-automatisch nieuwe interactieve applicaties zullen kunnen gemaakt worden.

Enkele didactisch-technische kenmerken zijn

(a) een **duidelijke structuur** met kleurcodes, die eventueel per leerkracht/school kunnen worden aangepast. Zo zijn definities en eigenschappen steeds bondig en correct geformuleerd in groene kaders, en hebben voorbeelden en oefeningen een blauwe achtergrond. Inleidingen, motiveringen, achtergrondinformatie, uitweidingen kunnen naar wens worden beperkt, weggelaten of uitklapbaar gemaakt. Hierdoor wordt voor leerlingen automatisch duidelijk wat er precies moet gekend zijn.

(b) bij theorie worden soms (optioneel) zogenaamde **'vlugge vragen'** voorzien die leerlingen toelaten om na te gaan of ze definities en eigenschappen correct hebben begrepen. Deze vragen kunnen bij een eerste kennismaking wat tijd en moeite vragen, maar moeten naarmate men vertrouwd raakt met de leerstof 'evident' worden voor iedereen. Daarnaast zijn er ook **'denkvragen'** die soms erg algemeen zijn, en dikwijls geen eenduidige antwoorden hebben, maar verwondering of creativiteit kunnen uitlokken.

(c) er wordt gestreefd naar **wiskundige exactheid zonder nodeloos formalisme**. Definities zijn duidelijk en correct. Notaties die worden ingevoerd worden ook verder gebruikt en herhaald, zodat leerlingen er mee vertrouwd raken. Zinvolle verbanden tussen onderdelen worden (uit-)gelegd.

(d) bij elk topic hoort een **'steekkaart'** met alle belangrijke concepten en eigenschappen (die kan worden gebruikt bij het studeren en bij het maken van oefeningen) en soms ook een 'steekkaart' met veronderstelde voorkennis die kan of moet worden herhaald of geactiveerd.

2.1 Intro: een nieuwe soort getallen?

Doorheen de geschiedenis van de wiskunde hebben nieuwe getallen een belangrijke rol gespeeld. Uit het tellen komen de meest eenvoudige getallen voort: 1 appel, 2 appels, 3 appels, ... Dit zijn de natuurlijke getallen, die genoteerd worden met de letter $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.

Met deze getallen kan je op verschillende manieren 'nieuwe getallen' maken. Door negatieve getallen toe te voegen wordt de verzameling getallen groter. Dit zijn de gehele getallen, die genoteerd worden met de letter $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +5, -5, ...\}$.

Één van de redenen waarom wiskundige nieuwe getallen invoeren, ligt in het oplossen van vergelijkingen. De vergelijking $x + 7 = 0$ heeft geen oplossing in de natuurlijke getallen. Zonder het gehele getal $x = -7$ kan je deze vergelijking niet oplossen.

Om even over na te denken . . .

De Oude Grieken hebben negatieve getallen nooit aanvaard. Voor hen is een getal altijd een hoeveelheid of een lengte, en dus positief. **Ben jij akkoord met de Oude Grieken?**

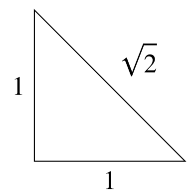
Bestaan negatieve getallen wel 'écht'?
Je hebt 1 appel, 2 appels, 3 appels, ... Maar wat is precies '-1 appel'?
Aan welke vereisten moet iets voldoen voordat jij het 'een getal' zou willen noemen?

Breuken leiden tot een volgende uitbreiding van de getallen. Die nieuwe getallen worden de rationale getallen genoemd, en genoteerd met de letter $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Voorbeelden zijn $\frac{2}{3}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{1}{1}$ en $\frac{0}{3}$. Ook rationale getallen zijn nuttig om vergelijkingen op te lossen, want de vergelijking $3x + 4 = 0$ heeft geen oplossing in de gehele getallen $\mathbb{Z}$. Zonder de breuk $x = \frac{-4}{3}$ is deze vergelijking niet oplosbaar.

Je merkt al snel dat je nog niet 'genoeg' getallen hebt. De stelling van Pythagoras leert ons dat de schuine zijde van de gegeven driehoek lengte $\sqrt{2}$ heeft.

Met een kort bewijs kan men aantonen dat $\sqrt{2}$ niet in de verzameling rationale getallen zit, dus dat

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797\ldots$$



niet te schrijven is als een breuk!. Deze getallen worden *irrationaal* genoemd en hebben altijd oneindig veel cijfers na de komma. Andere voorbeelden zijn

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375\ldots, \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ en } \pi^2$$

Ook irrationale getallen zijn nuttig om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking $x^2 + 2 = 4$ heeft immers geen oplossing in de rationale getallen $\mathbb{Q}$. Zonder het irrationale getal $x = \sqrt{2}$ kan je deze vergelijking niet oplossen. Als de irrationale getallen worden toegevoegd aan de rationale getallen $\mathbb{Q}$, bekom je de reële getallen $\mathbb{R}$. De reële getallen vormen een rechte waarbij met elk punt met een reëel getal overeenkomt.

Om even over na te denken . . .

Bestaan er volgens jou nog andere soorten getallen?

- Zijn er vergelijkingen die je niet kan oplossen met de reële getallen $\mathbb{R}$?
- Zou je de reële rechte nog kunnen 'uitbreiden'?

2.1 Intro: een nieuwe soort getallen?

2.1.1 Op zoek naar nieuwe getallen: een complexe geschiedenis...

Oefening 2.1.1. Heron van Alexandrië

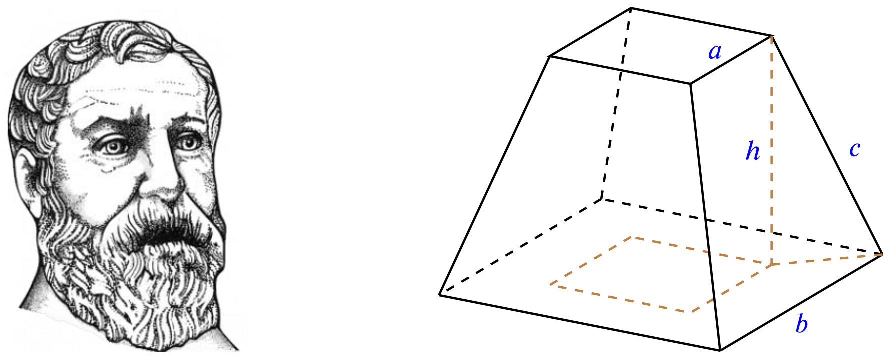
De Griekse wiskundige Heron van Alexandrië zocht in de eerste eeuw v. Chr de hoogte h van een afgeplatte piramide met basis b, afgeplatte top a en schuine ribbe c.

a) Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat de hoogte h wordt gegeven door:

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{b-a}{2}^2}$$

.

b) Heron van Alexandrië berekende de hoogte van de afgeplatte piramide met volgende afmetingen: b = 28, a = 4 en c = 15. **Ga Heron van Alexandrië achterna en voer deze berekening uit, valt er je iets op aan het eindresultaat?**



Figuur 1: Heron van Alexandrië en zijn afgeplatte piramide.

Om even over na te denken ...

- Wat zou $\sqrt{-4}$ kunnen betekenen?
- Ken je een getal dat als kwadraat -4 heeft?
- Zijn er vergelijkingen die $\sqrt{-4}$ als oplossing hebben?

Heron van Alexandrië schreef als oplossing de positieve wortel $\sqrt{63}$ in zijn schrift. Waarom hij dat deed is onduidelijk. De meest voor de hand liggende verklaring is dat hij deze negatieve wortel niet kon aanvaarden.

In de 9de eeuw schreef de Indische wiskundige Mahaviracarya in zijn werk Ganita-Sara-Sangraha over wortels van negatieve getallen hetvolgende[1]

> 'In de natuur der dingen is een negatieve hoeveelheid geen kwadraat, en het heeft dus geen vierkantswortel'.

Het duurde tot de 16de eeuw voordat negatieve wortels opnieuw opdoken in de wiskunde, op het moment dat de Italiaanse wiskunde Cardano het volgende probleem probeerde op te lossen:

Oefening 2.1.2. Gerolamo Cardano

Zoek 2 getallen waarvan de som gelijk is aan 10; en het product gelijk is aan 40. In symbolen is dit

[1] David Eugene Smith, *The Mathematics of Mahāvīrācārya with English Translations and Notes*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1913, volume 19, p312. Eigen vertaling uit het Engels.

2.1 Intro: een nieuwe soort getallen?

het stelsel $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$ waarbij x en y getallen zijn.
Cardano vond een oplossing voor dit probleem omdat hij rekende met negatieve wortels.
Durf jij Cardono achterna om dit probleem op te lossen?

Over zijn berekening schrijft Cardano zelf het volgende:

> "Putting aside the mental tortures involved, multiply $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$ ... Hence this product is 40... This is truly sophisticated."

Opmerking 2.1.1. Cardano heeft goede redenen om zijn negatieve wortels te omschrijven als 'mentale martelingen'. De rekenregel $\sqrt{\square\square} = \sqrt{\square}\sqrt{\square}$ zorgt meteen voor een tegenstrijdigheid:

We schrijven $\sqrt{\square}$ enkel voor $\square \in \mathbb{R}$.

Vlugge Vraag

Geef een voorbeeld van deze tegenstrijdigheid.

Om deze tegenstrijdige rekenregels te vermijden, voerde Euler een symbool i met als eigenschap dat $i^2 = -1$. Het gebruik van negatieve wortels kan nu altijd vermeden worden:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = 3i$$

René Descartes, bekend van het cartesiaans assenstelsel, is deze getallen tegengekomen bij het oplossen van meetkundige problemen. Hij schreef hierover[2]:

> '...on ne fçaurait les rendre autres qu' imaginaires.'
>
> '...we kunnen ze niet anders dan denkbeeldig maken.'

Hierdoor is men deze nieuwe getallen 'imaginaire getallen' gaan noemen.

Figuur 2: René Descartes

Om deze getallen beter te begrijpen zijn wiskundigen ze in een vlak beginnen voorstellen. Op de reële rechte stelt elk punt een reëel getal voor. In het **complexe vlak** zal elk punt een complex getal voorstellen.

De Ierse wiskundige William Rowan Hamilton schreef hierover in 1837 het volgende[3]:

[2]Descartes, René. *La géométrie.* 1637, p47, Eigen vertaling uit het Frans.
[3]Hamilton, William Rowan. *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time*, Irish Acad. Trans. **XVII** (1837), 519–422.

2.1 Intro: een nieuwe soort getallen?

Figuur 3: William Rowan Hamilton

> "...be concisely denoted as follows, $\sqrt{-1} = (0, 1)$. In the theory of single numbers, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an impossible extraction, or a merely imaginary number; but in the theory of couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a possible extraction, or a real couple, namely the principal square-root of the couple $(-1, 0)$."

Uit het citaat blijkt dat in het vlak deze nieuwe getallen veel minder 'denkbeeldig' zijn dan wiskundigen lang gedacht hebben. Het nieuwe symbool i waarvoor $i^2 = -1$, blijkt simpelweg het punt $(0, 1)$ te zijn. Omdat deze nieuwe getallen worden samengesteld uit het nieuwe symbool i en 2 reële getallen, kregen ze ook de naam 'complex'.

Vandaag worden deze nieuwe 'complexe' getallen gebruikt bij het programmeren van computergames, bij het berekenen van elektronische schakelingen en in de kwantummechanica.

2.2 Intro: nieuwe getallen voor vergelijkingen

Doorheen de geschiedenis van de wiskunde hebben nieuwe getallen een belangrijke rol gespeeld. Uit het tellen komen de meest eenvoudige getallen voort: 1 appel, 2 appels, 3 appels, ... Dit zijn de natuurlijke getallen, die genoteerd worden met de letter $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$.

Met deze getallen kan je op verschillende manieren 'nieuwe getallen' invoeren. Door negatieve getallen toe te voegen wordt de verzameling getallen groter. Dit zijn de gehele getallen, die genoteerd worden met de letter $\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Wiskundigen hebben allerlei redenen om nieuwe getallen in te voeren, waaronder het oplossen van vergelijkingen. De vergelijking $x + 2 = 1$ heeft bijvoorbeeld geen oplossing in de natuurlijke getallen. Zonder het gehele getal $x = -1$ is deze vergelijking niet oplosbaar.

Om even over na te denken . . .

De Oude Grieken hebben negatieve getallen nooit aanvaard. Voor hen is een getal altijd een hoeveelheid of een lengte, en dus positief. **Ben jij akkoord met de Oude Grieken?**

Bestaan negatieve getallen wel 'écht'?

Je hebt 1 appel, 2 appels, 3 appels, ... Maar wat is precies '-1 appel'?

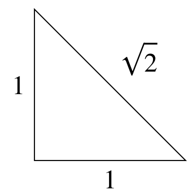
Aan welke vereisten moet iets voldoen voordat jij het 'een getal' zou willen noemen?

Breuken leiden tot een volgende uitbreiding van de getallen. Die nieuwe getallen worden de rationale getallen genoemd, en genoteerd met de letter $\mathbb{Q} = \left\{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$. Voorbeelden zijn $\frac{2}{3}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{1}{1}$ en $\frac{0}{3}$. Ook rationale getallen zijn nuttig om vergelijkingen op te lossen, want de vergelijking $3x + 4 = 0$ heeft geen oplossing in de gehele getallen $\mathbb{Z}$. Zonder de breuk $x = \frac{-4}{3}$ is deze vergelijking niet oplosbaar.

Je merkt al snel dat je nog niet 'genoeg' getallen hebt. De stelling van Pythagoras leert ons dat de schuine zijde van de gegeven driehoek lengte $\sqrt{2}$ heeft.

Met een kort bewijs kan men aantonen dat $\sqrt{2}$ niet in de verzameling rationale getallen zit, dus dat

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797\ldots$$



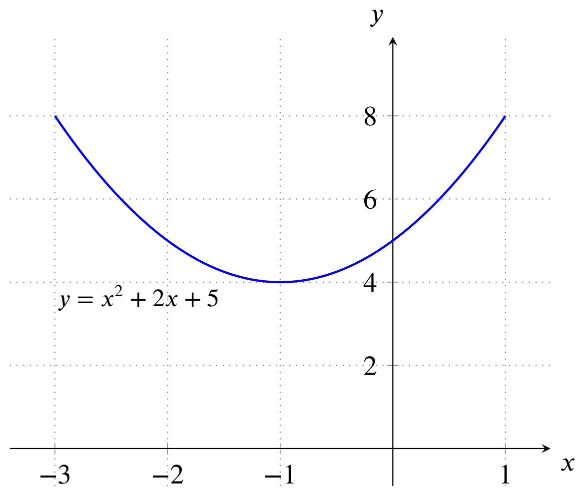
niet te schrijven is als een breuk!. Deze getallen worden *irrationaal* genoemd en hebben altijd oneindig veel cijfers na de komma. Andere voorbeelden zijn

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937 5\ldots, \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ en } \pi^2$$

Ook irrationale getallen zijn nuttig om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking $x^2 + 2 = 4$ heeft immers geen oplossing in de rationale getallen $\mathbb{Q}$. Zonder het irrationale getal $x = \sqrt{2}$ kan je deze vergelijking niet oplossen. Als de irrationale getallen worden toegevoegd aan de rationale getallen $\mathbb{Q}$, bekom je de reële getallen $\mathbb{R}$. De reële getallen vormen een rechte waarbij met elk punt een reëel getal overeenkomt.

In het vierde jaar heb je geleerd hoe je de tweedegraadsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ kan oplossen. Hierbij maakte je een onderscheid naargelang het teken van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. De vergelijking $x^2 + 2x + 5 = 0$ heeft als discriminant $D = b^2 - 4ac = 4 - 20 = -16$. De discriminant is negatief en deze vergelijking heeft dus geen oplossingen. De grafiek van deze functie heeft geen snijpunten met de x-as.

2.2 Intro: nieuwe getallen voor vergelijkingen



Je hebt geleerd dat de algemene oplossingen voor een tweedegraadsvergelijking gegeven wordt door

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

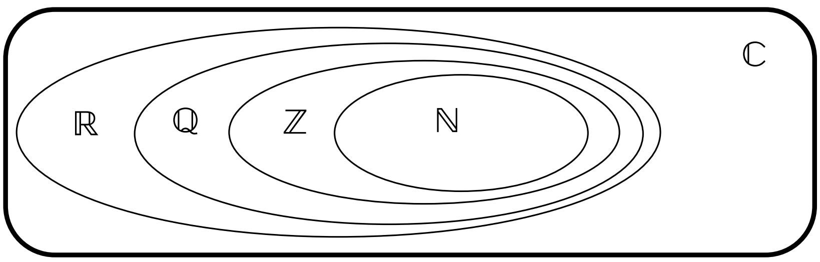
Misschien is de formule toch zinvol? Rekenen met de negatieve discriminant geeft:

$$x_{1,2} = \frac{-2 + -\sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 + -4\sqrt{-1}}{2} = -1 + -2\sqrt{-1}$$

.

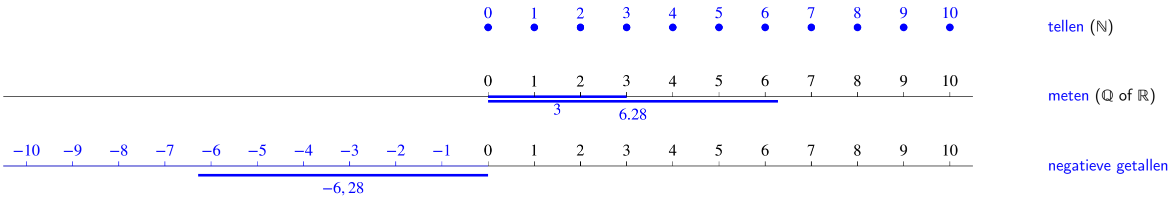
In deze 'mogelijke oplossing' staat $\sqrt{-1}$. Omdat er geen reëel getal is met als vierkantswortel -1, heeft deze vergelijking geen oplossing in de reële getallen $\mathbb{R}$. Wanneer er voor een vergelijking geen oplossing was, werden hierboven steeds nieuwe getallen toegevoegd. In dit hoofdstuk worden de reële getallen $\mathbb{R}$ verder uitgebreid tot de complexe getallen $\mathbb{C}$ door een nieuw getal i toe te voegen met als eigenschap dat $i^2 = -1$. De tweedegraadsvergelijking $x^2 + 2x + 5 = 0$ heeft dan wel oplossingen in de complexe getallen: $-1 + 2i$ en $-1 - 2i$.

Vandaag worden deze nieuwe 'complexe' getallen gebruikt bij het programmeren van computergames, bij het berekenen van elektronische schakelingen en in de kwantummechanica.



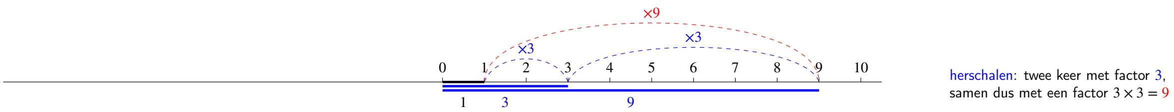
2.3 Intro: nieuwe getallen voor meetkunde

Het woord *getallen* is afgeleid van *tellen*, zoals bij één appel, twee appels, drie appels,.... Je kan met getallen echter ook *meten* in plaats van tellen, zoals bij één meter of twee meter, en dan kunnen ook kommagetallen zoals 1,5 meter of 3,14 meter voorkomen. En als je temperaturen wil meten heb je ook negatieve getallen als -10 of -272 nodig.

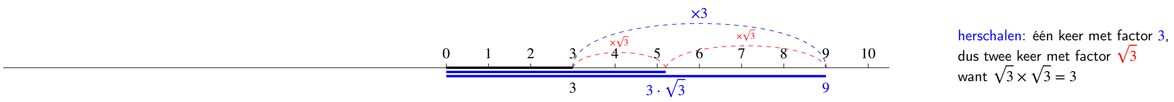


In dit hoofdstuk maak je kennis met een nieuw soort getallen. En met deze nieuwe getallen kan je nieuwe dingen doen, die onmogelijk zijn met de getallen die je al kent.

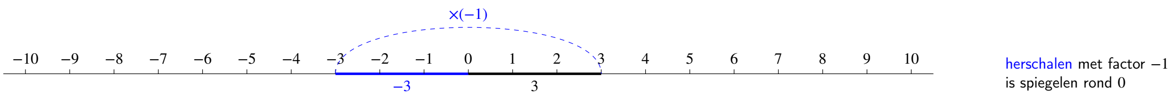
Bekijk het gebruik van getallen om te herschalen. Het getal 3 kan dienen om alles met een factor drie te vergroten. Door dat twee keer na elkaar te doen, wordt er vergroot met een factor $3 \times 3 = 9$.



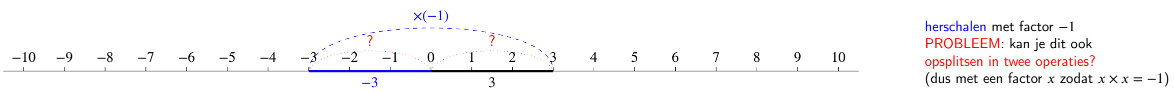
Maar wat als je *in twee stappen* met in totaal een factor 3 willen vergroten? Dan zoek je een getal x zodat $x \times x = 3$, en dergelijk getal is $\sqrt{3}$, de vierkantswortel van 3.



Vermenigvuldigen met -1 is spiegelen rond de oorsprong, als volgt:



Men kan zich afvragen of op één of andere manier ook het spiegelen van de getallenrechte kan worden opgesplitst in het herhalen van twee keer dezelfde operatie.



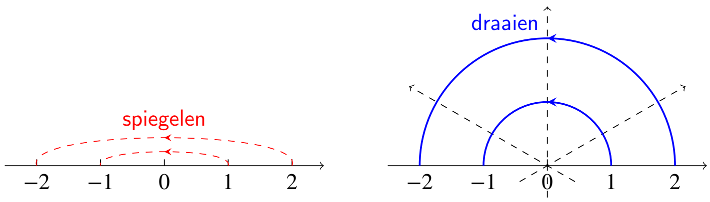
Om even over na te denken ...

Denk je dat het mogelijk is om een operatie op de getallenas te vinden zodat deze operatie twee keer na elkaar uitvoeren de getallenas spiegelt rond te oorsprong?

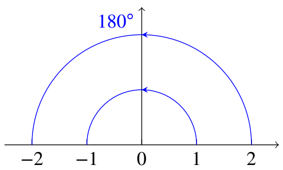
De eenvoudige, maar toch ook geniale oplossing oplossing staat op de volgende bladzijde. Maar je wil die eigenlijk toch graag zelf vinden.

2.3 Intro: nieuwe getallen voor meetkunde

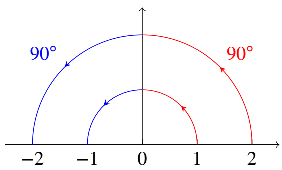
De methode om 'in twee keer' te spiegelen bestaat uit twee delen: ten eerste om het probleem tweedimensionaal te bekijken, waardoor de oplossing voor het grijpen ligt.



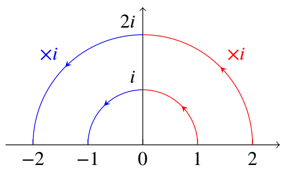
Inderdaad, je kan de getallenrechte spiegelen door je blad 180° te draaien. Nu is het natuurlijk ook makkelijk een manier te vinden om dat in twee keer te doen: je draait twee keer een kwartslag!



draaien over 180°



twee keer draaien over 90°



twee keer vermenigvuldigen met i

Er is nu dus een nieuw getal i, dat zodanig is dat vermenigvuldigen met i niet betekent 'herschalen' maar 'draaien over een rechte hoek'. Het product van het reële getal 1 met i krijg je door het getal 1 over een hoek van $90°$ in tegenwijzerzin te draaien, en het nieuwe getal dat je dan vindt is $1 \cdot i = i$. En i is dus het punt $(0, 1)$ op de y-as.

Vlugge Vraag

Waaraan is i^2 dus gelijk ...?

Om deze 'oplossing' van het probleem een nieuw 'getal' te noemen was veel durf nodig.

Vandaag worden deze nieuwe 'complexe' getallen gebruikt bij het programmeren van computergames, bij het berekenen van elektronische schakelingen en in de kwantummechanica.

2.4 Complexe getallen (algebraisch)

Met een nieuwe symbool i worden er nieuwe getallen ingevoerd. Er ontstaan combinaties als $2i$ en $i+1$, die we **complexe getallen** noemen, niet omdat ze ingewikkeld zijn, maar omdat ze zijn *samengesteld* uit reële getallen en het nieuwe symbook i.

Definitie 2.4.1 (Complex getal).

Een **complex getal** is een uitdrukking van de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$.
Het symbool i waarvoor $\boxed{i^2 = -1}$ noemen we de **imaginaire eenheid**.

De **verzameling complexe getallen** noteren we met $\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}}$.

Voor een complex getal $z = a + bi$ noemen we:
$a = \text{Re}(a + bi) = \text{Re}(z)$ het **reëel deel**
$b = \text{Im}(a + bi) = \text{Im}(z)$ het **imaginair deel**.

Als $\text{Im}(z) = b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal**
Als $\text{Re}(z) = a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Twee complexe getallen zijn **gelijk** indien ze dezelfde reële en imaginaire delen hebben:

$$\begin{aligned} z = w \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Re}(z) = \text{Re}(w) \text{ en } \text{Im}(z) = \text{Im}(w) \\ a + bi = c + di \quad &\Longleftrightarrow \quad a = c \text{ en } b = d \end{aligned}$$

Complexe getallen worden dikwijls met de letters z of w genoteerd, net zoals we voor een natuurlijk getal n gebruiken of voor functies f, g en h.

Opmerking 2.4.1 (Gelijkheid van complexe getallen).

Het kan overbodig lijken om te vermelden wanneer twee complexe getallen $z = a + bi$ en $w = c + di$ aan elkaar gelijk zijn. Merk op dat een gelijkaardige regel voor breuken *niet* geldt: als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelijk zijn hoeft niet te gelden dat $a = c$ en $b = d$. De breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ zijn immers gelijk, maar hun tellers en noemers toch zijn verschillend.

Vlugge Vraag:

Zijn $\frac{3}{5}, 5, \pi$ en 0 voorbeelden van complexe getallen?

Voorbeeld 2.4.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

z	Re(z)	Im(z)
$2+3i$	2	3
$5-6i$	5	-6
$1+i\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\frac{1-i\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

z	Re(z)	Im(z)
$1+\pi$	$1+\pi$	0
42	42	0
$42i$	0	42
$5i+7$	7	5
$2+5i+\pi$	$2+\pi$	5

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 2.4.1. Geef telkens het reëel en het imaginair deel van de volgende complexe getallen.

1. $8 + 3i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

2.4 Complexe getallen (algebraisch)

2. $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

3. $7i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

4. 5 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

5. $\dfrac{1+2i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

6. i heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

7. $\dfrac{9+3i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

8. $\pi+i+e$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

9. 0 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

10. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

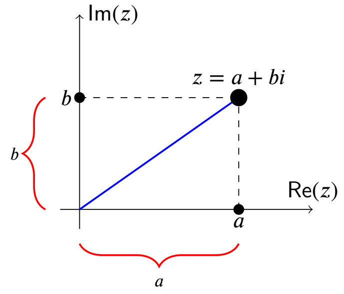
Oefening 2.4.2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk, door gebruik te maken van de gelijkheid $i^2=-1$.

1. $i^2=\dots\dots$ **3.** $-i^3=\dots\dots$ **5.** $-i^4=\dots\dots$ **7.** $i^{11}=\dots\dots$ **9.** $-i^2=\dots\dots$

2. $i^5=\dots\dots$ **4.** $i^4=\dots\dots$ **6.** $i^{10}=\dots\dots$ **8.** $i^{12}=\dots\dots$ **10.** $i^{2028}=\dots\dots$

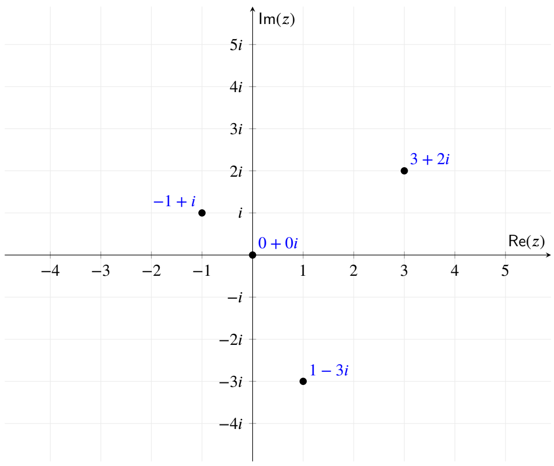
2.5 Het complexe vlak

Een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ kan worden beschouwd als een punt in het reële vlak, namelijk als het punt met cartesiaanse coördinaten (a, b), waarbij a, b reële getallen zijn. De schrijfwijze $a + bi$ van een complex getal noemt men de **cartesiaanse vorm**. We spreken in deze context ook van **het complexe vlak** of **het vlak van Gauss**.



De **zuiver reële** getallen bevinden zich op de (horizontale) x−as, die we dan ook de **reële as** noemen. De **zuiver imaginaire** getallen bevinden zich op de (verticale) y−as, die we de **imaginaire as** noemen.

Complexe getallen als punten in het complexe vlak zullen ook een meetkundige interpretatie geven aan de bewerkingen (optellen, vermenigvuldigen, ...) die je met getallen kan uitvoeren.



Oefening 2.5.1. Geef devolgende complexe getallen weer als punten in het bovenstaande complexe vlak.

(a) $3 + 3i$

(b) $-4 - 4i$

(c) $-2i$

(d) $4 + 0i$

(e) $-3 - 4i$

(f) $2 + 5i$

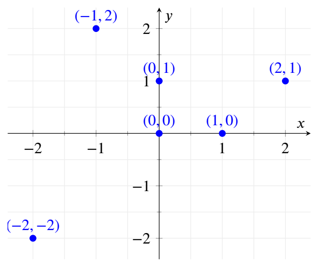
Oefening 2.5.2. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $\text{Im}(z) \leq 0$

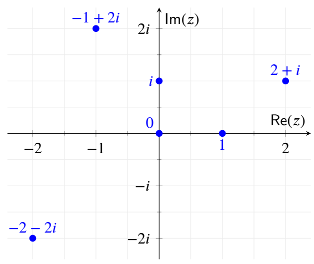
2. $0 \leq \text{Re}(z) \leq 2$

2.6 Complexe getallen (meetkundige definitie)

Complexe getallen kan je beschouwen als een nieuwe manier om het reële vlak te bekijken.
Je weet al dat je door een x-as en een y-as in te voeren elk punt van het vlak met behulp van coördinaten kan schrijven als **een koppel** (a, b) reële getallen. Zo ligt bijvoorbeeld punt $(1, 0)$ op de x-as, punt $(2, 1)$ in het **eerste kwadrant**, en is $(0, 0)$ de **oorsprong**.



Het vlak met *koppels reële getallen* (a, b).



Het complexe vlak met *complexe getallen* $a + bi$

Door nu het punt $(0, 1)$ op de y-as een nieuwe naam i te geven, en het punt $(1, 0)$ op de x-as gewoon als 1, kan je het punt $(2, 1)$ ook schrijven als

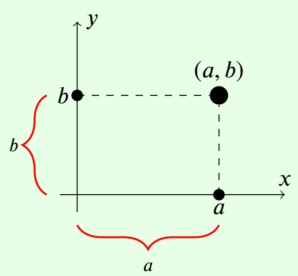
$$(2, 1) = (2, 0) + (0, 1) = 2 \cdot (1, 0) + (0, 1) = 2 + i$$

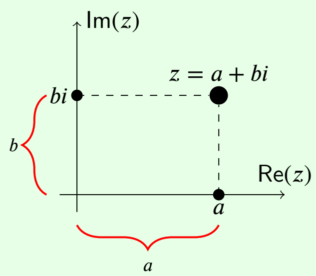
en een willekeurig punt (a, b) als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

Deze eenvoudige operatie lijkt op het eerste zicht misschien wat merkwaardig, maar zal blijken bijzonder interessant te zijn en een volledig nieuwe wiskundige wereld te openen met toepassingen in computerwetenschappen, fysica en ingenieurswetenschappen. De kracht volgt vooral uit de afspraak dat $i^2 = i \cdot i = -1$.

Definitie 2.6.1 (Complex getal)**.** Een **complex getal** is een uitdrukking van de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en i een nieuw symbool waarvoor we afspreken dat $\boxed{i^2 = -1}$. Een complex getal $a + bi$ kan je bekijken als een nieuwe schrijfwijze voor het punt (a, b). De **verzameling complexe getallen** noteren we met $\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}}$, en wordt ook het **complexe vlak** genoemd.





Voor $z = a + bi$ noemen we a het **reëel deel**, b het **imaginair deel** en we noteren $\boxed{\text{Re}(z)} = \text{Re}(a + bi) = a$, $\boxed{\text{Im}(z)} = \text{Im}(a + bi) = b$.

Als $\text{Im}(z) = b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal**, en
als $\text{Re}(z) = a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Omdat complex getallen overeenkomen met punten in het vlak, zijn twee complexe getallen aan elkaar gelijk als ze dezelfde reële en imaginaire delen hebben:

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ en } b = d$$

of ook

$$z = w \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(w) \text{ en } \text{Im}(z) = \text{Im}(w)$$

2.6 Complexe getallen (meetkundige definitie)

Vlugge Vraag

Waar liggen de zuiver imaginaire getallen in het complexe vlak? En waar de zuiver reële getallen?

Opmerking 2.6.1 (Gelijkheid van complexe getallen).

Het kan overbodig lijken om te vermelden wanneer twee complexe getallen $z = a + bi$ en $w = c + di$ aan elkaar gelijk zijn. Merk op dat een gelijkaardige regel voor breuken *niet* geldt: als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelijk zijn hoeft niet te gelden dat $a = c$ en $b = d$. De breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ zijn immers gelijk, maar hun tellers en noemers toch zijn verschillend.

Voorbeeld 2.6.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

z	Re(z)	Im(z)
$2 + 3i$	2	3
$5 - 6i$	5	-6
$1 + i\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\frac{1 - i\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

z	Re(z)	Im(z)
$1 + \pi$	$1 + \pi$	0
42	42	0
$42i$	0	42
$5i + 7$	7	5
$2 + 5i + \pi$	$2 + \pi$	5

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 2.6.1. Geef telkens het reëel en het imaginair deel van de volgende complexe getallen.

1. $8 + 3i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

2. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

3. $7i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

4. 5 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

5. $5i - 4$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

6. $\frac{1 + 2i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

7. i heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

8. $\frac{9 + 3i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

9. $\pi + i + e$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

10. 0 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

11. $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

Oefening 2.6.2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk, door gebruik te maken van de gelijkheid $i^2 = -1$.

1. $i^2 = \ldots\ldots$ **3.** $-i^3 = \ldots\ldots$ **5.** $-i^4 = \ldots\ldots$ **7.** $i^{11} = \ldots\ldots$ **9.** $-i^2 = \ldots\ldots$

2. $i^5 = \ldots\ldots$ **4.** $i^4 = \ldots\ldots$ **6.** $i^{10} = \ldots\ldots$ **8.** $i^{12} = \ldots\ldots$ **10.** $i^{2028} = \ldots\ldots$

2.7 Optellen en vermenigvuldigen

Optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen volgen uit de gebruikelijke rekenregels. Door gebruik te maken van de rekenregel $i^2 = -1$ kan een complex getal telkens geschreven worden in de standaardvorm $a + bi$.

Definitie 2.7.1 (Som en product)**.** Voor reële getallen a, b, c, d geldt door uitwerken en $i^2 = -1$ dat

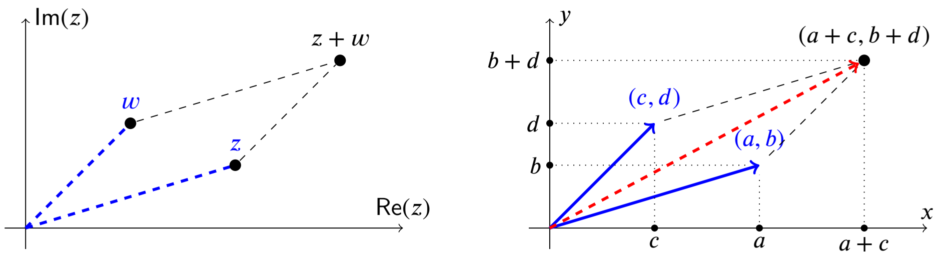
$$\boxed{(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i} \qquad \boxed{(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) &= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2 \cdot 3i + 2 \cdot 4i^2 \\ &= (3 - 8) + (4 + 6)i \\ &= -5 + 10i\end{aligned}}$$

Voorbeeld 2.7.1.

1. $(2 - 4i) + (3 + 5i) = 5 + i$
2. $(3 + i) - (1 - 2i) = 2 + 3i$
3. $(3 + i) \cdot (1 - 2i) = 5 - 5i$
4. $(1 - i) + (2 + i) = 3$
5. $(-3 + 2i) + (3 + 5i) = 7i$
6. $(-3 + 2i)i = -2 - 3i$

De som van complexe getallen komt overeen met de som vectoren via de parallellogramregel:



Net zoals bij de reële getallen spreken we ook van het **tegengestelde** $-z = -(a + bi) = -a - bi$.

De vermenigvuldiging heeft een wat ingewikkeldere meetkundige interpretatie die elders wordt uitgelegd.

Oefening 2.7.1.

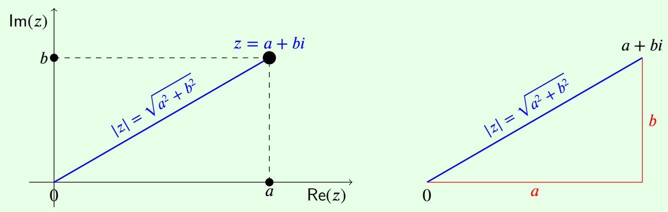
1. $(1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = \ldots\ldots$
2. $(1 + 2i) \cdot \dfrac{1 - 2i}{2} = \ldots\ldots$
3. $(1 + 2i) \cdot i = \ldots\ldots$
4. $i^4 = \ldots\ldots$

2.8 De norm van een complex getal

De *absolute waarde* $|a|$ van een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ geeft de afstand weer van dit punt tot de oorsprong op de reële rechte. Voor complexe getallen neemt men de afstand tot de oorsprong van het complexe vlak.

Definitie 2.8.1 (Modulus van een complex getal)**.**
De **modulus** (of **norm**) van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd $|z|$, is het *positief reëel* getal

$$\boxed{|z| \overset{\text{def}}{=} |a+bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}} \qquad \boxed{|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.}$$



De modulus $|z|$ is meetkundig **de afstand van** z **tot de oorsprong** (wegens Pythagoras).

Vlugge Vraag

Teken alle complexe getallen waarvoor $|z| = 1$ in het complexe vlak.

Voorbeeld 2.8.1.

1. $|i| = 1$
2. $|-i| = 1$
3. $|-2| = 2$
4. $|2i| = 2$
5. $|1-1| = 0$
6. $|1| + |-1| = 2$
7. $|3-4i| = 5$
8. $|1+i| = \sqrt{2}$

De modulus heeft volgende basiseigenschappen:

Eigenschap 2.8.1 (Eigenschappen modulus)**.** Voor complexe getallen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

(a) $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong.

(b) $|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2.

(c) $|z| = |-z|$.

(d) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Bewijs Oefening. ■

LET OP: in het algemeen geldt niet $\cancel{|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|}$ (want bv. $0 = |1+(-1)| \neq |1|+|-1| = 2$)

2.9 De complex toegevoegde van een complex getal

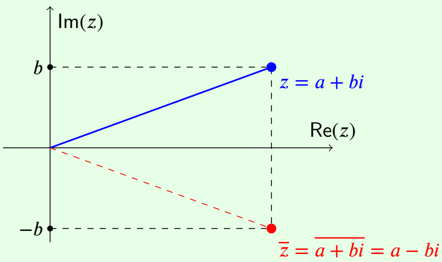
Complexe getallen kan je spiegelen rond de x-as, en dat zal blijken een bijzonder nuttige operatie te zijn, die geen equivalent heeft voor een reëel getal. Terwijl men bij spiegelen door de oorsprong spreekt over het *tegengestelde* $-z$, noemt men de over de x-as gespiegelde het **complex toegevoegde** $\overline{z}$.

Definitie 2.9.1 (Complex toegevoegde van een complex getal)**.**

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd $\overline{z}$, is het *complexe* getal

$$\boxed{\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a - bi} \qquad \boxed{\overline{3+4i} = 3 - 4i.}$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



Vlugge Vraag:

Waar in het complex vlak ligt het complex toegevoegde van de zuiver reële getallen?

Voorbeeld 2.9.1.

1. $\overline{3-4i} = 3+4i$
2. $\overline{3+4i} = 3-4i$
3. $\overline{-3-4i} = -3+4i$
4. $\overline{-3} = -3$
5. $\overline{i} = -i$
6. $\overline{-i} = i$

Volgende eigenschap, waarvan het bewijs een oefening is, geeft aan dat complex toevoegen compatibel is met optelling en vermenigvuldiging.

Eigenschap 2.9.1 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.** Voor complexe getallen z en w geldt

$$\boxed{\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}} \qquad \boxed{\overline{(2+3i)+(4+5i)} = 6 - 8i = \overline{2+3i} + \overline{4+5i}}$$

$$\boxed{\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}} \qquad \boxed{\overline{(2+3i)\cdot(4+5i)} = -7 - 22i = \overline{2+3i} \cdot \overline{4+5i}}$$

Oefening 2.9.1. Bereken voor een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \overline{z} = \ldots\ldots$
2. $z - \overline{z} = \ldots\ldots$
3. $z \cdot \overline{z} = \ldots\ldots$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond:

Eigenschap 2.9.2 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.** Voor een complex getal $z = a+bi$ geldt

$$\boxed{\overline{\overline{z}} = (\overline{z}) = z} \qquad \boxed{\overline{\overline{(2+3i)}} = \overline{2-3i} = 2+3i}$$

$$\boxed{z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)} \qquad \boxed{2+3i \ + \ \overline{2+3i} = 2+3i+2-3i = 4 = 2\text{Re}(2+3i)}$$

$$\boxed{z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)} \qquad \boxed{2+3i \ - \ \overline{2+3i} = 2+3i-2+3i = 6i = 2i\text{Im}(2+3i)}$$

2.9 De complex toegevoegde van een complex getal

$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$ $\boxed{(2+3i)(2-3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13 = |2+3i|^2}$

Zowel de som als het product van een getal z en zijn complex toegevoegde $\overline{z}$ zijn steeds *reëel*, en dat zal een manier opleveren om het inverse z^{-1} te berekenen, en dus het quotiënt van twee complexe getallen.

2.10 De deling van complexe getallen

Uit de formule $z\overline{z} = |z|^2$ en de bewerking

$$z\overline{z} = |z|^2 \iff \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1 \iff z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

volgt dat $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ de inverse is van z, want hun product is 1.

Eigenschap 2.10.1. Voor een complex getal z geldt

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}} \qquad \boxed{(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i}$$

Hieruit volgt ook onmiddellijk een manier om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen:

Eigenschap 2.10.2. Voor een complexe getal z en w geldt

$$\boxed{\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2}} \qquad \boxed{\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i}$$

Voorbeeld 2.10.1. Bereken $\frac{3+2i}{1-5i} = -\frac{7}{26} + \frac{7}{26}i$.

Uitwerking: De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\frac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $a + bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a + bi$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2+3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2-3\sqrt{2}$.

Oefening 2.10.1. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a + bi$:

1. $\frac{1}{1+2i} = \ldots\ldots$

2. $\frac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$

3. $\frac{3+4i}{1+2i} = \ldots\ldots$

2.11 Tweedegraadsvergelijkingen in de complexe getallen

Wiskundigen zijn dikwijls erg enthousiast over complexe getallen omdat ze de wiskunde vereenvoudigen. Dit lijkt voor sommigen misschien moeilijk te geloven, maar we zullen het proberen aan te tonen door het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen opnieuw te bestuderen nu we stilaan vertrouwd raken met de complexe getallen.

In de tweede graad werd reeds gezien hoe je tweedegraadsvergelijkingen oplost:

Opmerking 2.11.1 (Vierkantsvergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen in $\mathbb{R}$.).

Eigenschap 2.11.1.

Een (reële) tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft als **discriminant** het (reële) getal $\boxed{D = b^2 - 4ac}$, en heeft als oplossingen

als $D < 0$: geen reële oplossingen

als $D = 0$: precies een reële oplossing, namelijk $\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$

als $D > 0$: precies twee reële oplossingen, namelijk $\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}}$ en $\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

Bovendien zijn de volgende uitspraken equivalent:

(a) x_1 en x_2 zijn oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$
(b) x_1 en x_2 zijn nulpunten van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$
(c) x_1 en x_2 zijn snijpunten van de kromme $y = ax^2 + bx + c$ met de x-as
(d) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (ontbinden in factoren)
(e) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (som en product van de wortels)

Een negatieve discriminant stelde in de tweede graad een probleem, want uit negatieve getallen kan je in de reële getallen geen vierkantswortels trekken. Bij complexe getallen verdwijnt dat probleem:

Eigenschap 2.11.2.

Een (reële) tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft altijd twee complex toegevoegde oplossingen, namelijk

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \text{ en } \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

die echter samenvallen als $b^2 - 4ac = 0$, en dan gelijk worden aan $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Het begrip discriminant wordt dus in zekere zin overbodig (of minstens veel minder belangrijk).

Voorbeeld 2.11.1.

1. De wortels van de vergelijking $x^2 + 4 = 0$ zijn $x_1 = 2i$ en $x_2 = -2i$.

2. De wortels van de vergelijking $x^2 + x + 1 = 0$ zijn $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Oefening 2.11.1. Bereken de wortels van volgende vergelijkingen.

1. $x^2 + 2x + 3 = 0$

2.11 Tweedegraadsvergelijkingen in de complexe getallen

2. $2x^2 + 3x + 4 = 0$

Oefening 2.11.2. Ontbind volgende veeltermen in lineaire factoren.

1. $x^2 + 2x + 3$

2. $2x^2 + 3x + 4$

3.1 De polaire schrijfwijze van complexe getallen

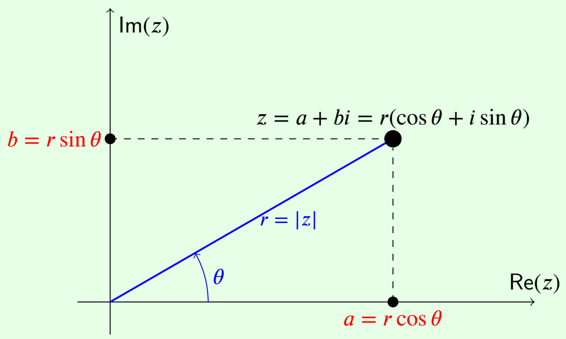
In het vorig hoofdstuk werd een punt in het complexe vlak beschreven met behulp van carthesische coordinaten. In dit hoofdstuk wordt een alternatieve manier behandeld om punten in het complexe vlak te beschrijven. Hiermee zullen verschillende operaties van complexe getallen, waaronder de vermenigvuldig, veel eenvoudiger en inzichtelijker worden.

Vlugge Vraag

Is er een andere manier waarmee je een punt in het vlak zou kunnen beschrijven?

De carthesische schrijfwijze associeert met een elk complex getal $z = a + bi$ het koppel (a, b). Het reeël deel a komt overeen met de projectie op de reële as, het imaginair deel b komt overeen met de projectie op de imaginaire as. De polaire vorm associeert met elk complex getal in het vlak een koppel poolcoördinaten (r, θ). Hierbij is $r = |z|$ de norm (afstand tot de oorsprong) en θ de hoek die de overeenkomstige vector maakt met de positieve reële as. Op die manier wordt elk complex getal beschreven met een uniek koppel poolcoordinaten.

Definitie 3.1.1. De *poolcoördinaten* van een complex getal zijn het koppel (r, θ), hierbij is $r = |z|$ de **modulus** en θ het **argument**. De hoek θ wordt gemeten in radialen, in tegenwijzerzin, en is slechts op een veelvoud van 2π na bepaald.



Op die manier krijgt elk complexe getal een polaire schrijfwijze $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Men kan een complexe getal in carthesische schrijfwijze $z = a + bi$ omvormen naar polaire vorm $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en vice versa. Het zal blijken dat sommige berekeningen veel eenvoudiger zijn in één van beide schrijfwijzes. De stelling van pythagoras en de goniometrische getallen leggen het verband tussen de carthesische en polaire schrijfwijze.

Eigenschap 3.1.1 (Transformatieformules cartesische en goniometrische schrijfwijze)**.**

Een complex getal z met goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ heeft als cartesische schrijfwijze $a + bi$ met:

$$\boxed{a = r\cos\theta}$$
$$\boxed{b = r\sin\theta}$$

Een complex getal z met cartesische schrijfwijze $a + bi$ heeft als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta +$

3.1 De polaire schrijfwijze van complexe getallen

$i \sin\theta)$ met:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Vlugge Vraag

Gebruik de stelling van pythagoras en de defitie van de cosinus, sinus en tangens in een rechthoekige driehoek om bovenstaande formules af te leiden.

Opmerking 3.1.1.

- Omdat θ niet uniek bepaald is, heeft elk complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *oneindig veel goniometrische schrijfwijzes* $z = r\,(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, met $k \in \mathbb{Z}$. Vaak wordt er echter voor gekozen om θ tussen 0 en 2π te geven: we kunnen ons sneller voorstellen waar de hoek $\frac{5\pi}{4}$ ligt dan de hoek $\frac{1093\pi}{4}$.
- Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 3.1.1.

Geef de goniometrische schrijfwijze van volgende complexe getallen waarvan het argument gemakkelijk grafisch gevonden kan worden:

1. $z = 1$

2. $z = i$

3. $z = 1 + i$

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Merk op: bij het opschrijven van de goniometrische schrijfwijze met concrete getallen moet je de sin en cos laten staan. Als je die toch zou uitrekenen, krijg je immers terug de cartesische schrijfwijze.

Opmerking 3.1.2.

Als $a \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \text{als } a \neq 0$$

Als $a > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{als } a > 0$$

Als $a < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \qquad \text{als } a < 0$$

3.1 De polaire schrijfwijze van complexe getallen

Als $a = 0$, dan ligt $z = a + bi$ op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{bgtan} \frac{b}{a} & \text{als } a > 0 \\ \pi + \operatorname{bgtan} \frac{b}{a} & \text{als } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

3.2 De vermenigvuldiging in polaire vorm

Het optellen van complexe getallen is erg eenvoudig in de cartesische schrijfwijze, het correspondeert immers met het optellen van vectoren. Bij de vermenigvuldigen van complexe getallen is de polaire schrijfwijze erg eenvoudig, ook deze bewerking correspondeert met een meetkundige operatie in het complexe vlak. Zij $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ complexe getallen. Met behulp van de som- en verschilformules van goniometrische getallen levert een rechtstreekse berekening:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)), \end{aligned}$$

De moduli r_i worden vermenigvuldigd, en de argumenten θ_i worden opgeteld.

Eigenschap 3.2.1 (Vermenigvuldiging van twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze).

De *modulus* van het product van twee complexe getallen is het *product van de moduli* van die getallen.

Het *argument* van het product van twee complexe getallen is de *som van de argumenten* van die getallen.

Voor $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ wordt het product gegeven door

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

Oefening 3.2.1. Gegeven zijn de complexe getallen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_2 &= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

Bereken algebraïsch de volgende complexe getallen en geef het resultaat in cartesische en polaire vorm.

1. $z_1 \cdot z_2$

2. $(z_1)^2$

3. $\frac{z_2}{z_1}$

3.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

De n-de macht van een complexe getal z^n is het n-voudig product $z \cdot z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$. (n-keer invoegen). Met de vermenigvuldiging van complexe getallen kan dit n-voudig product uitgerekend worden. Ook hier zijn de berekeningen met de goniometrische schrijfwijze veel eenvoudiger.

Het meest eenvoudige geval $n = 2$ is het kwadraat z^2 van een complex getal. Dit is de vermenigvuldiging van het complex getal met zichzelf. Voor een complex getal z met als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ wordt dit:

$$z^2 = z \cdot z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^2(\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)) = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Het herhalen van deze methode levert dan hogere machten van een complex getal. $z^3 = z^2 \cdot z$. Het algemene resultaat staat bekend als de formule van DeMoivre:

Eigenschap 3.3.1 (Formule van De Moivre)**.**
Voor een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en elk natuurlijk getal n geldt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Voorbeeld 3.3.1. We kunnen $(1+i)^8$ op 2 manieren berekenen:

(a) $(1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$, dus $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = (2i)^2 = -4$, dus $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

(b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, dus $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i\cdot 0) = 16$

Oefening 3.3.1. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = \dots\dots$

2. $(-1-i)^{20} = \dots\dots$

3. $(1+i)^{21} = \dots\dots$

4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = \dots\dots$

Oefening 3.3.2. Gegeven is het complex getal $z = \cos(\frac{3\pi}{4} + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$.

1. Bereken $z^0, z^1, z^2, z^3, \dots, z^8$ en schrijf telkens het resultaat in cartesische vorm.

2. Stel de opeenvolgende machten van z voor in het complexe vlak. Wat valt je op?

3.4 Vierkantswortels van complexe getallen

Een belangrijke motivatie voor het invoeren van complexe getallen was het creëren van een 'vierkantswortel uit -1', die we i noteerden. Het is nu tijd om niet alleen de vierkantswortel van -1 te bestuderen, maar die van willekeurige complexe getallen.

Opmerking 3.4.1 (Vierkantswortels van reële getallen)**.**

Je bent al lang vertrouwd met vierkantswortels van reële getallen. We herhalen hier kort de belangrijkste eigenschappen.

Definitie 3.4.1 (Vierkantswortel van een reëel getal)**.**

Een reëel getal w is een vierkantswortel van een reëel getal a als

$\boxed{a = w^2}$ $\boxed{2 \text{ en } -2 \text{ zijn wortels van} 4 \text{ want } 2^2 = 4 \text{ en } (-2)^2 = 4}$

Enkel positieve getallen hebben vierkantswortels, en wel steeds twee die aan elkaar tegengesteld zijn. Bij 0 spreken we af dat de twee tegengestelde wortel samenvallen.

Eigenschap 3.4.1.

Een reëel getal a heeft een vierkantswortel als en slechts als a positief is (dus $0 \leq a$)
als en slechts als vergelijking $x^2 = a$ een oplossing heeft
als en slechts als vergelijking $x^2 - a = 0$ een oplossing heeft

Als $a > 0$, dan heeft a twee vierkantswortels, een positieve die we noteren met $\sqrt{a}$, en een negatieve die we noteren met $-\sqrt{a}$.

Vlugge Vraag: G

eeft telkens de precieze verzameling x'en waarvoor de gelijkheid wel geldt.

- Geldt voor elke reëel getal x dat $(\sqrt{x})^2 = x$?
- Geldt voor elke reëel getal x dat $(\sqrt{|x|})^2 = x$?
- Geldt voor elke reëel getal x dat $(\sqrt{|x|})^2 = |x|$?
- Geldt voor elke reëel getal x dat $|\sqrt{|x|}|^2 = |x|$?
-

Er is een evident verband met grafieken van functies: de vergelijking $x^2 - a = 0$ is oplosbaar als de grafiek van de functie $y = x^2 - a$ de x-as snijdt, en de nulwaarden of nulpunten zijn precies de twee vierkantswortels van a.

De definitie van vierkantswortels van complexe getallen is volledig gelijkaardig aan de gekende definitie voor reële getallen:

Definitie 3.4.2 (Vierkantswortel van complex getal)**.**

Een complex getal w is een vierkantswortel van een complex getal z als

$\boxed{z = w^2}$ $\boxed{i \text{ en } -i \text{ zijn wortels van } -1 \text{ want } i^2 = (-i)^2 = -1}$

Voorbeeld 3.4.1.

1. Het complex getal $2i$ is een vierkantswortel van -4.

2. Het complex getal $-2i$ is een vierkantswortel van -4.

3. Het complex getal 2 is geen vierkantswortel van 4.

4. Het complex getal -2 is geen vierkantswortel van -4.

5. Het complex getal $1 + 2i$ is een vierkantswortel van $-1 + 4i$.

3.4 Vierkantswortels van complexe getallen

6. Het complex getal $1-2i$ is geen vierkantswortel van $-1+4i$.

7. Het complex getal $1+i$ is een vierkantswortel van $2i$.

Bij complexe getallen zijn vierkantswortels eenvoudiger dan bij reële getallen, want het verschil tussen positieve en negatieve getallen valt weg.

Eigenschap 3.4.2. Elke complex getal w heeft twee tegengestelde vierkantswortels.

of ook, equivalent geformuleerd:

De vergelijking $x^2 - w = 0$ heeft steeds twee aan elkaar tekengestelde wortels.

We spreken af dat voor $w = 0$ het getal 0 een 'dubbele wortel' is, waarbij 0 en $-0 = 0$ tegengestelden zijn...

Een erg gedetailleerd bewijs

We zullen de eigenschap bewijzen door voor een willekeurig complex getal $w = a + bi$ expliciet twee vierkantswortels te berekenen.

We zoeken twee oplossingen van de vergelijking $z^2 - w = 0$. Stel $z = x + iy$, dan zoeken we dus geschikte reële getallen x en y zodat

$$a + bi = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Omdat twee complexe getallen enkel aan elkaar gelijk zijn als hun reële delen en imaginaire delen gelijk zijn, volgt dat we oplossingen zoeken van het stelsel

$$(A) \leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

Dit is een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden, maar de vergelijkingen zijn niet lineair. De theorie van het oplossen van lineaire stelsels helpt ons dus niet.

Het oplossen van niet-lineaire stelsels is in het algemeen hopeloos, maar hier is er een trucje. Bij gebrek aan betere ideeën, berekenen we $a^2 + b^2$ door vergelijkingen (1) en (2) te substitueren

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

Dat is een mooi resultaat, maar helpt het ons ook vooruit?

We kunnen nu vergelijking $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ toevoegen aan het stelsel (A) zonder de oplossingen van dat stelsel te wijzigen.

Vlugge Vraag

Waarom kunnen er geen oplossingen verdwijnen, en ook geen oplossingen bijkomen.

We zoeken dus x en y zodat

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (3) \end{cases} \tag{1}$$

Op het eerste zicht hebben we het probleem moeilijke gemaakt, want nu hebben we zelfs een vergelijking meer om mee rekening te hopuden. Maar door de vergelijkingen (1) en (3) bij elkaar op te tellen resp. van elkaar af te trekken, vinden we relatief eenvoudig uitdrukkingen voor x^2 en y^2:

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ -2y^2 = a - \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}, \text{ of dus } (B) \leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \end{cases}$$

Je kan opmerken dat deze uitdrukkingen zinvol zijn, omdat elke uitdrukking onder een wortelteken steeds zeker positief is. Bovendien voldoen de x en y uit de laatste uitdrukkingen bijna automatisch aan de vergelijking $2xy = b$. Dat kunnen we makkelijkst nagaan door $4x^2y^2$ te berekenen (want dan hebben we minder wortels):

$$4x^2y^2 = (a + \sqrt{a^2 + b^2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})) = -a^2 + (a^2 + b^2) = b^2$$

en dus is $2xy = \pm b$. Er zijn in (B) nog twee mogelijkheden voor x, en twee voor y. Door deze slim te combineren kunne we er voor zorgen dat inderdaad $2xy = b$ (en niet $-b$).

Conclusie: we vinden voor elk complex getal $w = a + bi$ twee vierkantswortels $z = \pm(x + iy)$, namelijk

3.4 Vierkantswortels van complexe getallen

Als $b \geq 0$ dan zijn z_1 en $-z_1$ wortels met $z_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, en

als $b < 0$ dan zijn z_2 en $-z_2$ wortels met $z_2 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, en

Dit beëindigt het bewijs: we hebben voor elk complex getal w expliciet twee wortels berekend. ■

Opmerking 3.4.2. Vierkantswortels in $\mathbb{C}$ zijn eigenlijk eenvoudiger dan in $\mathbb{R}$, omdat er *altijd* vierkantswortels bestaan. Toch is er een subtiliteit.

Inderdaad, voor ëen positief reëel getal a hebben we $\sqrt{a}$ gedefinieerd als de *positieve* vierkantswortel, en $-\sqrt{a}$ is dan natuurlijk de negatieve wortel. Deze keuze is voor complexe getallen echter onmogelijk, omdat op $\mathbb{C}$ de begrippen 'positief' en 'negatief' geen betekenis hebben.

Het is dus niet eenvoudig mogelijk om uit de twee wortels van een complex getal w er op consistente wijze één te kiezen om $\sqrt{w}$ te zijn.
Naast het probleem met de rekenregels, is dit een extra reden om **het gebruik van het symbool $\sqrt{\cdot}$ voor complexe getallen te vermijden**.

3.5 Wortels van complexe getallen

Het begrip n-de machtswortel van de reële getallen kan op het eerste zicht ook eenvoudig worden gebruikt bij complexe getallen. Er treden echter enkele nieuwe fenomenen op.

Definitie 3.5.1.

Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ en complex getal $w \in \mathbb{C}$ is een complex getal $z \in \mathbb{C}$ **een n-de machtswortel van** w als de n-de macht van z gelijk is aan w:

$\boxed{z \text{ is } \textbf{een } n\textbf{-de machtswortel van } w \iff z^n = w}$ $\boxed{2^4 = (-2)^4 = 16, \quad (-2i)^3 = 8i}$

Voorbeeld 3.5.1. Welke van volgende uitspraken zijn waar?

1. Juist 3 is een derdermachtswortel van 27
2. Fout -3 is een derdermachtswortel van 27
3. Juist i is een vierkantswortel van -1
4. Fout $2 + 3i$ is een vierkantswortel van $4 + 9i$
5. Juist $2 + 3i$ is een vierkantswortel van $-5 + 12i$

Opmerking 3.5.1.

- Net zoals bij de reële getallen is het begrip n-de machtswortel van a dus eigenlijk gewoon een naam voor *een oplossing van de vergelijking* $x^n = a$.
- Bij de reële getallen was er een belangrijk onderscheid tussen n even en n oneven omdat negatieve getallen geen even machtswortels hebben, en positieve getallen twee even machtswortels hebben:

$$\begin{array}{lll} x^2 = 4 & \text{heeft twee reële oplossingen:} & x = 2 \text{ en } x = -2 \\ x^2 = -4 & \text{heeft geen reële oplossingen:} & x^2 \neq -4, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^3 = 8 & \text{heeft een unieke reële oplossing:} & x = 2 \\ x^3 = -8 & \text{heeft een unieke reële oplossing:} & x = -2 \end{array}$$

  Er zijn altijd ten hoogste twee reële n-de machtswortels, en als $a \in \mathbb{R}$ twee n-de machtswortel had noemden we de unieke positieve **de** n-machtswortel, en noteerden die met $\sqrt[n]{a}$ of $a^{1/n}$. Voor n even was dan ook $-\sqrt[n]{a}$ *een* n-de machtswortel.

- Bij complexe getallen is de zaak enerzijds eenvoudiger: we zullen zien dat er *altijd* precies n n-de machtswortels zijn. Anderzijds is het niet meer mogelijk om over **de** n-de machtswortel te spreken. We zullen dan ook de notatie $\sqrt[n]{z}$ of $z^{1/n}$ niet gebruiken.

Vergelijkingen van de vorm $z^n = a + bi$ met $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ zijn met de formule van De Moivre op te lossen.

Voorbeeld 3.5.2. Bereken alle vierkantswortels van $1 - i$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

3.5 Wortels van complexe getallen

Voor het rechterlid $1 - i$ geldt

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4},$$

zodat

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

De vergelijking $z^2 = 1 - i$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^2 = \sqrt{2} \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2^{1/4}$ en $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We hebben de onbekenden r en θ dus gevonden.

Voor $k = 0$ is $\theta = -\frac{\pi}{8}$ en voor $k = 1$ is $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van beide hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus precies twee verschillende oplossingen

$$z_1 = 2^{1/4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \qquad \text{en} \qquad z_2 = 2^{1/4}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

Voorbeeld 3.5.3. Vind alle vierdemachtswortels uit 1.

Uitwerking: We zoeken alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$.

We stellen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta).$$

Voor het rechterlid 1 geldt

$$|1| = 1, \qquad \arg(1) = 0,$$

zodat

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

De vergelijking $z^4 = 1$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

Gelijkheid van complexe getallen leert ons dat

$$r^4 = 1 \text{ met } r \in \mathbb{R}^+ \text{ en } 4\theta = 0 + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 1$, want $r^4 = 1$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = k\pi/2$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Dit levert vier verschillende wortels.
$z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$,
$z_2 = 1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2) = i$,
$z_3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$,
$z_4 = 1(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2) = -i$.

Dit voorbeeld kan je veel sneller oplossen door $z^4 - 1$ te ontbinden in factoren:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

De nulpunten hiervan zijn inderdaad 1,-1,i,-i. Ontbinden in factoren lukt echter niet meer bij bijvoorbeeld $z^5 = 1$, hiervoor moet je bovenstaande methode gebruiken.

3.5 Wortels van complexe getallen

Oefening 3.5.1. Bereken alle derdemachtswortels van $8i$.

Je kan de vergelijking $z^n = w$ oplossen voor een algemeen getal $w \in \mathbb{C}$, en dan krijg je formules die je daarna kan gebruiken. Het resultaat geeft volgende interessante eigenschap: de vergelijking $z^n = w$ heeft voor elke $w \in \mathbb{C}_0$ precies n oplossingen:

Eigenschap 3.5.1. Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}_0$ heeft de vergelijking $z^n = w$ precies n verschillende complexe oplossingen

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \text{ met } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Bewijs ■

4.1 De complexe getallen vormen een veld

Wiskundigen hebben onderzocht waaraan dingen zouden moeten voldoen om ze redelijkerwijze 'getallen' te willen noemen. Het lijkt evident dat we 'getallen' willen kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Van een voldoende rijke verzameling getallen verwachten we ook dat elk getal een tegengestelde heeft, en ook een inverse. Bovendien moeten de optelling en de vermenigvuldiging natuurlijk 'compatibel' zijn, zo willen we bijvoorbeeld dat $x + x = 2 \cdot x$ voor elk getal x.

Sinds het begin van de twintigste eeuw werden volgende eisen vastgelegd om voldoende eigenschappen van de 'gewone' reële getallen te behouden. We formuleren ze hier voor de complexe getallen $\mathbb{C}$.

Eigenschap 4.1.1. $\mathbb{C}, +$ is een commutatieve groep. Dat betekent

(Gs1)	$\forall u, v \in \mathbb{C}$:	$u + v \in \mathbb{C}$	(intern)
(Gs2)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}$:	$(u + v) + w = u + (v + w)$	(associatief)
(Gs3)	$\forall u \in \mathbb{C}$:	$u + 0 = u = 0 + u$	(neutraal element)
(Gs4)	$\forall u \in \mathbb{C}, \exists -u \in \mathbb{C}$:	$u + (-u) = 0 = (-u) + u$	(tegengestelde)
(Gs5)	$\forall u, v \in \mathbb{C}$:	$u + v = v + u$	(commutatief)

Eigenschap 4.1.2. $\mathbb{C}_0, \cdot$ is een commutatieve groep. Dat betekent

(Gp1)	$\forall u, v \in \mathbb{C}_0$:	$u \cdot v \in \mathbb{C}$	(intern)
(Gp2)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}_0$:	$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(associatief)
(Gp3)	$\forall u \in \mathbb{C}_0$:	$u \cdot 1 = u = 1 \cdot u$	(neutraal element)
(Gp4)	$\forall u \in \mathbb{C}_0, \exists u^{-1} \in \mathbb{C}$:	$u \cdot u^{-1} = 1 = u^{-1} \cdot u$	(tegengestelde)
(Gp5)	$\forall u, v \in \mathbb{C}_0$:	$u \cdot v = v \cdot u$	(commutatief)

De compatibiliteit tussen plus en maal heet de **distributiviteit**:

Eigenschap 4.1.3. De vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling:

(D1) $\forall u, v, w \in \mathbb{C}$: $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ $\quad$ ($\cdot$ is distributief t.o.v. $+$)

De voorgaande eigenschappen worden samengevat in het wiskundige begrip **veld**:

Definitie 4.1.1. De complexe getallen $\mathbb{C}, +, \cdot$ met de optelling en de vermenigvuldiging vormen een **veld** omdat ze voldoen aan bovenstaande eigenschappen van

1) commutatieve groep voor de optelling (Gs1)-(Gs5),
2) commutatieve groep voor de vermenigvuldiging (Gp1)-(Gp5),
3) distributiviteit van de optelling ten opzichte van de vermenigvuldiging (D1).

Ook de rationale getallen $\mathbb{Q}, +, \cdot$ en de reële getallen $\mathbb{R}, +, \cdot$ zijn voorbeelden van velden.

Vlugge Vraag

Waarom zijn de natuurlijke getallen $\mathbb{N}, +, \cdot$ *geen* veld?

Vlugge Vraag

Vormen de gehele getallen $\mathbb{Z}, +, \cdot$ een veld?

Een erg belangrijke en interessante eigenschap van reële getallen is bovendien dat ze geordend zijn:

Eigenschap 4.1.4. De reële getallen $\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$ zijn een totaal geordend veld, dat betekent

$\mathbb{R}, +, \cdot$ is een veld, en bovendien geldt

4.1 De complexe getallen vormen een veld

(Ot1)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$:	als $x \leq y$ en $y \leq x$	dan $x = y$	(antisymmetrie)
(Ot2)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:	als $x \leq y$ en $y \leq z$	dan $x \leq z$	(transitief)
(Ot3)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$:	$u \leq v$ of $v \leq u$	(of beide)	(totaal)

waarbij de orde $\leq$ compatibel is met som $+$ en het product $\cdot$, dus

(Oc1)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:	als $x \leq y$	dan $x + z < y + zy$	(compatibel met $+$)
(Oc2)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$:	als $0 \leq x$ en $0 < y$	dan $0 < x \cdot y$	(compatibel met $\cdot$)

Opmerking 4.1.1.

Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee complexe getallen dus niet zeggen welk "het kleinsteïs.

In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2 + 3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1 + i$ *positief* is en $-1 - i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.

5.1 Werkblad: deling van complexe getallen

Het optellen en vermenigvuldigen van complexe getallen $a+bi$ en $c+di$ stelt geen probleem zodra je ermee vertrouwd bent dat je steeds i^2 moet vervangen door -1.

Oefening 5.1.1 (Opwarming).

1. $(2+3i)+(4+5i) = \ldots\ldots$
2. $(2+3i)\cdot i = \ldots\ldots$
3. $i^3 \cdot i^5 = \ldots\ldots$
4. $(2+3i)\cdot(4+5i) = \ldots\ldots$

Op dit werkblad onderzoek je zelf hoe je twee complexe getallen door elkaar zou kunnen delen.

Om even over na te denken ...

Hoe zou je het quotiënt $\dfrac{2+3i}{4+5i} = \ldots\ldots$ kunnen berekenen ?
Zijn er misschien eenvoudige complexe getallen waar je wel kan door delen?
Kan je het probleem misschien herformuleren ...?

Oefening 5.1.2 (Eerste mogelijkheid om het probleem aan te pakken).
Probeer *een eenvoudiger geval*. Hier kan je bijvoorbeeld proberen een complex getal alvast te delen door een *reëel* getal.

Oefening 5.1.3 (Tweede mogelijkheid om het probleem aan te pakken).
Een *naam* geven aan het gezochte antwoord opent soms nieuwe mogelijkheden.

Oefening 5.1.4 (Derde mogelijkheid om het probleem aan te pakken).
Een *gelijkaardig* probleem dat je al kan oplossen geeft misschien inspiratie.

Eigenschap 5.1.1 (Oplossing: hoe delen door een complex getal?).
Door teller en noemer te vermenigvuldigen met het 'toegevoegde' van de noemer, wordt die noemer reëel, en kan je de deling dus makkelijk uitvoeren:

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{4+5i} &= \frac{2+3i}{4+5i}\cdot\frac{4-5i}{4-5i}\\ &= \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}\\ &= \frac{8-15+10i+12i}{16+25}\\ &= \frac{-7+22i}{41} = \frac{-7}{41}+\frac{22}{41}i\end{aligned}$$

Met bovenstaande eigenschap kan je dus relatief eenvoudig quotiënten van complexe getallen berekenen.

Oefening 5.1.5. Bereken.

1. $\dfrac{1}{1-i} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{i}{1+i} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{1-i}{2i} = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{7-6i}{i} = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{8+i}{i+4} = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{-1+5i}{5+i} = \ldots\ldots$

5.2 Opmerkingen

Opmerking 5.2.1.

- Een complex getal kan per definitie op een unieke manier geschreven worden als $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$. Dus $1, i, 1+i, 1+3i$ zijn allemaal complexe getallen die we niet eenvoudiger kunnen schrijven. Maar $2i+3+i, i(1+i)$ en $(1+i)(1-i)$ zijn complexe getallen die we wel eenvoudiger kunnen schrijven als $2i+3+i = 3+3i, \quad i(1+i) = i+i^2 = -1+i, \quad (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2.$
- Als je twee complexe getallen kan optellen, is het ook eenvoudig om ze van elkaar af te trekken: $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. Je kan twee complexe getallen ook *delen* door elkaar, dit wordt later uitgelegd.
- Ingenieurs gebruiken meestal de letter j in plaats van i, onder meer om verwarring te voorkomen met de elektrische stroom i. Dan geldt dus $j^2 = -1$, en $z = a + bj \in \mathbb{C}$.
- Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee complexe getallen dus niet zeggen welk "het kleinsteïs.
  In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2+3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1+i$ *positief* is en $-1-i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.