Complexe getallen (algebraisch)

Met een nieuwe symbool i worden er nieuwe getallen ingevoerd. Er ontstaan combinaties als $2i$ en $i+1$, die we **complexe getallen** noemen, niet omdat ze ingewikkeld zijn, maar omdat ze zijn *samengesteld* uit reële getallen en het nieuwe symbook i.

Definitie 1 (Complex getal)**.**

Een **complex getal** is een uitdrukking van de vorm $a+bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$.
Het symbool i waarvoor $\boxed{i^2 = -1}$ noemen we de **imaginaire eenheid**.

De **verzameling complexe getallen** noteren we met $\boxed{\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}}$.

Voor een complex getal $z = a+bi$ noemen we:
$a = \text{Re}(a+bi) = \text{Re}(z)$ het **reëel deel**
$b = \text{Im}(a+bi) = \text{Im}(z)$ het **imaginair deel**.

Als $\text{Im}(z) = b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal**
Als $\text{Re}(z) = a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Twee complexe getallen zijn **gelijk** indien ze dezelfde reële en imaginaire delen hebben:

$$\begin{aligned} z = w &\iff \text{Re}(z) = \text{Re}(w) \text{ en } \text{Im}(z) = \text{Im}(w) \\ a+bi = c+di &\iff a = c \text{ en } b = d \end{aligned}$$

Complexe getallen worden dikwijls met de letters z of w genoteerd, net zoals we voor een natuurlijk getal n gebruiken of voor functies f, g en h.

Opmerking 1 (Gelijkheid van complexe getallen)**.**

Het kan overbodig lijken om te vermelden wanneer twee complexe getallen $z = a+bi$ en $w = c+di$ aan elkaar gelijk zijn. Merk op dat een gelijkaardige regel voor breuken *niet* geldt: als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelijk zijn hoeft niet te gelden dat $a = c$ en $b = d$. De breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ zijn immers gelijk, maar hun tellers en noemers toch zijn verschillend.

Vlugge Vraag:

Zijn $\frac{3}{5}, 5, \pi$ en 0 voorbeelden van complexe getallen?

Voorbeeld 1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

z	Re(z)	Im(z)
$2+3i$	2	3
$5-6i$	5	-6
$1+i\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\frac{1-i\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

z	Re(z)	Im(z)
$1+\pi$	$1+\pi$	0
42	42	0
$42i$	0	42
$5i+7$	7	5
$2+5i+\pi$	$2+\pi$	5

De getallen 42 en $1+\pi$ zijn zuiver reële getallen, $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 1. Geef telkens het reëel en het imaginair deel van de volgende complexe getallen.

1. $8+3i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

2. $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

3. $7i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

4. 5 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

5. $\frac{1+2i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

6. i heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

7. $\frac{9+3i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

8. $\pi + i + e$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

9. 0 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

10. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

Oefening 2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk, door gebruik te maken van de gelijkheid $i^2 = -1$.

1. $i^2 = \ldots\ldots$
2. $i^5 = \ldots\ldots$
3. $-i^3 = \ldots\ldots$
4. $i^4 = \ldots\ldots$
5. $-i^4 = \ldots\ldots$
6. $i^{10} = \ldots\ldots$
7. $i^{11} = \ldots\ldots$
8. $i^{12} = \ldots\ldots$
9. $-i^2 = \ldots\ldots$
10. $i^{2028} = \ldots\ldots$