De complexe getallen vormen een veld

Wiskundigen hebben onderzocht waaraan dingen zouden moeten voldoen om ze redelijkerwijze 'getallen' te willen noemen. Het lijkt evident dat we 'getallen' willen kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Van een voldoende rijke verzameling getallen verwachten we ook dat elk getal een tegengestelde heeft, en ook een inverse. Bovendien moeten de optelling en de vermenigvuldiging natuurlijk 'compatibel' zijn, zo willen we bijvoorbeeld dat $x + x = 2 \cdot x$ voor elk getal x.

Sinds het begin van de twintigste eeuw werden volgende eisen vastgelegd om voldoende eigenschappen van de 'gewone' reële getallen te behouden. We formuleren ze hier voor de complexe getallen $\mathbb{C}$.

Eigenschap 1. $\mathbb{C}, +$ is een commutatieve groep. Dat betekent

(Gs1)	$\forall u, v \in \mathbb{C}$:	$u + v \in \mathbb{C}$	(intern)
(Gs2)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}$:	$(u + v) + w = u + (v + w)$	(associatief)
(Gs3)	$\forall u \in \mathbb{C}$:	$u + 0 = u = 0 + u$	(neutraal element)
(Gs4)	$\forall u \in \mathbb{C}, \exists -u \in \mathbb{C}$:	$u + (-u) = 0 = (-u) + u$	(tegengestelde)
(Gs5)	$\forall u, v \in \mathbb{C}$:	$u + v = v + u$	(commutatief)

Eigenschap 2. $\mathbb{C}_0, \cdot$ is een commutatieve groep. Dat betekent

(Gp1)	$\forall u, v \in \mathbb{C}_0$:	$u \cdot v \in \mathbb{C}$	(intern)
(Gp2)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}_0$:	$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(associatief)
(Gp3)	$\forall u \in \mathbb{C}_0$:	$u \cdot 1 = u = 1 \cdot u$	(neutraal element)
(Gp4)	$\forall u \in \mathbb{C}_0, \exists u^{-1} \in \mathbb{C}$:	$u \cdot u^{-1} = 1 = u^{-1} \cdot u$	(tegengestelde)
(Gp5)	$\forall u, v \in \mathbb{C}_0$:	$u \cdot v = v \cdot u$	(commutatief)

De compatibiliteit tussen plus en maal heet de **distributiviteit**:

Eigenschap 3. De vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling:

(D1)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}$:	$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$	($\cdot$ is distributief t.o.v. $+$)

De voorgaande eigenschappen worden samengevat in het wiskundige begrip **veld**:

Definitie 1. De complexe getallen $\mathbb{C}, +, \cdot$ met de optelling en de vermenigvuldiging vormen een **veld** omdat ze voldoen aan bovenstaande eigenschappen van

1)	commutatieve groep voor de optelling	(Gs1)-(Gs5),
2)	commutatieve groep voor de vermenigvuldiging	(Gp1)-(Gp5),
3)	distributiviteit van de optelling ten opzichte van de vermenigvuldiging	(D1).

Ook de rationale getallen $\mathbb{Q}, +, \cdot$ en de reële getallen $\mathbb{R}, +, \cdot$ zijn voorbeelden van velden.

Vlugge Vraag

Waarom zijn de natuurlijke getallen $\mathbb{N}, +, \cdot$ *geen* veld?

Vlugge Vraag

Vormen de gehele getallen $\mathbb{Z}, +, \cdot$ een veld?

Een erg belangrijke en interessante eigenschap van reële getallen is bovendien dat ze geordend zijn:

Eigenschap 4. De reële getallen $\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$ zijn een totaal geordend veld, dat betekent

$\mathbb{R}, +, \cdot$ is een veld, en bovendien geldt

(Ot1)	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	als $x \leq y$ en $y \leq x$	dan $x = y$	(antisymmetrie)
(Ot2)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	als $x \leq y$ en $y \leq z$	dan $x \leq z$	(transitief)
(Ot3)	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	$u \leq v$ of $v \leq u$	(of beide)	(totaal)

waarbij de orde $\leq$ compatibel is met som $+$ en het product $\cdot$, dus

(Oc1)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}:$	als $x \leq y$	dan $x + z < y + zy$	(compatibel met $+$)
(Oc2)	$\forall x, y \in \mathbb{R}:$	als $0 \leq x$ en $0 < y$	dan $0 < x \cdot y$	(compatibel met $\cdot$)

Opmerking 1.

Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee complexe getallen dus niet zeggen welk "het kleinsteïs.
In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2 + 3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1 + i$ *positief* is en $-1 - i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.