

De deling van complexe getallen

Uit de formule $z\bar{z} = |z|^2$ en de bewerking

$$z\bar{z} = |z|^2 \iff \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1 \iff z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

volgt dat $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ de inverse is van z , want hun product is 1.

Eigenschap 1. Voor een complex getal z geldt

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(3 + 4i)^{-1} = \frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

Hieruit volgt ook onmiddellijk een manier om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen:

Eigenschap 2. Voor een complexe getal z en w geldt

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

Voorbeeld 1. Bereken $\frac{3 + 2i}{1 - 5i} = -\frac{7}{26} + \frac{7}{26}i$.

Uitwerking: De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\frac{3 + 2i}{1 - 5i}$ schrijven in de vorm $a + bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a + bi$:

$$\frac{3 + 2i}{1 - 5i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 5i)}{(1 - 5i)(1 + 5i)} = \frac{3 + 15i + 2i + 10i^2}{1 + 5i - 5i - 25i^2} = \frac{-7 + 17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2 + 3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2 - 3\sqrt{2}$.

Oefening 1. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a + bi$:

1. $\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

Uitwerking: Vermenigvuldig teller en noemer met $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$, zodat de noemer $(1 - 2i)(1 + 2i) = 5 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{1 - 2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

2. $\frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$

Uitwerking: Vermenigvuldig teller en noemer met $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$, zodat de noemer $(3 + 4i)(3 - 4i) = 25 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{1 + 2i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{11 + 2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$

3. $\frac{3 + 4i}{1 + 2i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$

Uitwerking: Vermenigvuldig teller en noemer met $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$, zodat de noemer $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3 + 4i}{1 + 2i} = \frac{3 + 4i}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{11 - 2i}{5} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$$