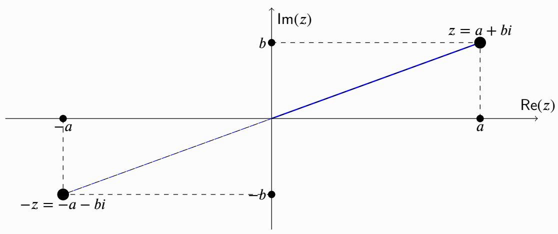
De complex toegevoegde van een complex getal

Uitweiding 1 (Het tegengestelde van een reëel getal)**.** Het tegengestelde $-a$ van een reëel getal a is een erg eenvoudig begrip, want $-a$ is 'het getal a met het omgekeerde teken'. Op de getallenrechte kan je $-a$ beschouwen als het spiegelbeeld van a rond de oorsprong.

Het tegengestelde $-z$ van een complex getal kan onmiddellijk en zonder enig probleem worden gedefinieerd:als $z = a+bi$, dan is $-z = -(a+bi) = -a-bi$, en in het complexe vlak is $-z$ het spiegelbeeld van z door de oorsprong:



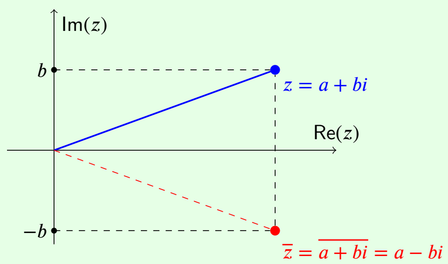
Complexe getallen kan je spiegelen rond de x-as, en dat zal blijken een bijzonder nuttige operatie te zijn, die geen equivalent heeft voor een reëel getal. Terwijl men bij spiegelen door de oorsprong spreekt over het *tegengestelde* $-z$, noemt men de over de x-as gespiegelde het **complex toegevoegde** $\overline{z}$.

Definitie 1 (Complex toegevoegde van een complex getal)**.**

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a+bi$, genoteerd $\overline{z}$, is het *complexe* getal

$$\boxed{\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a-bi} \qquad \boxed{\overline{3+4i} = 3-4i.}$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



Voorbeeld 1.

1. $\overline{3-4i} = 3+4i$
2. $\overline{3+4i} = 3-4i$
3. $\overline{-3-4i} = -3+4i$
4. $\overline{-3} = -3$
5. $\overline{i} = -i$
6. $\overline{-i} = i$

Volgende eigenschap, waarvan het bewijs een oefening is, geeft aan dat complex toevoegen compatibel is met optelling en vermenigvuldiging.

Eigenschap 1 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.** Voor complexe getallen z en w geldt

$$\boxed{\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}} \qquad \boxed{\overline{(2+3i)+(4+5i)} = 6-8i = \overline{2+3i} + \overline{4+5i}}$$

$$\boxed{\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}} \qquad \boxed{\overline{(2+3i)\cdot(4+5i)} = -7-22i = \overline{2+3i} \cdot \overline{4+5i}}$$

Oefening 1. Bereken voor een complex getal $z = a+bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

De complex toegevoegde van een complex getal

1. $z + \overline{z} = 2a$

Uitwerking:

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

2. $z - \overline{z} = 2bi$

Uitwerking:

$z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

3. $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Uitwerking:

$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond:

Eigenschap 2 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.** Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt

$$\boxed{\overline{\overline{z}} = \overline{(\,\overline{z}\,)} = z} \qquad \boxed{\overline{\overline{(2+3i)}} = \overline{2-3i} = 2+3i}$$

$$\boxed{z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)} \qquad \boxed{2+3i \ + \ \overline{2+3i} = 2+3i+2-3i = 4 = 2\mathrm{Re}(2+3i)}$$

$$\boxed{z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)} \qquad \boxed{2+3i \ - \ \overline{2+3i} = 2+3i-2+3i = 6i = 2i\mathrm{Im}(2+3i)}$$

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2} \qquad \boxed{(2+3i)(2-3i) = 4-9i^2 = 4+9 = 13 = |2+3i|^2}$$

Zowel de som als het product van een getal z en zijn complex toegevoegde $\overline{z}$ zijn steeds *reëel*, en dat zal een manier opleveren om het inverse z^{-1} te berekenen, en dus het quotiënt van twee complexe getallen.