Wiskunde Op Maat

WISKUNDE.OPMAAT.ORG

Complexe getallen D

(Versie 2025/02/26H.53)

Inhoudsopgave

WISKUNDE.OPMAAT.ORG

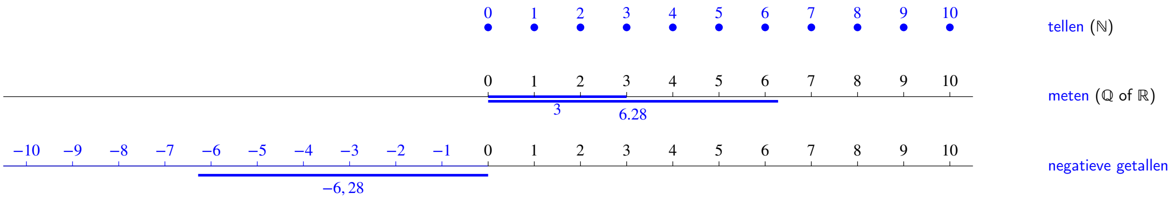
Hoofdstuk 1

Complexe getallen

(Versie 2025/02/26H.53)

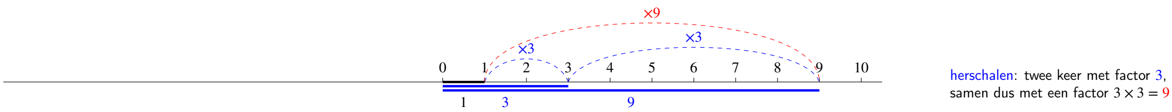
1.1 Intro: nieuwe getallen voor meetkunde

Het woord *getallen* is afgeleid van *tellen*, zoals bij één appel, twee appels, drie appels,. . . . Je kan met getallen echter ook *meten* in plaats van tellen, zoals bij één meter of twee meter, en dan kunnen ook kommagetallen zoals 1,5 meter of 3,14 meter voorkomen. En als je temperaturen wil meten heb je ook negatieve getallen als -10 of -272 nodig.

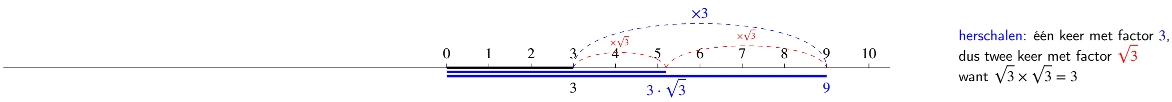


In dit hoofdstuk maak je kennis met een nieuw soort getallen. En met deze nieuwe getallen kan je nieuwe dingen doen, die onmogelijk zijn met de getallen die je al kent.

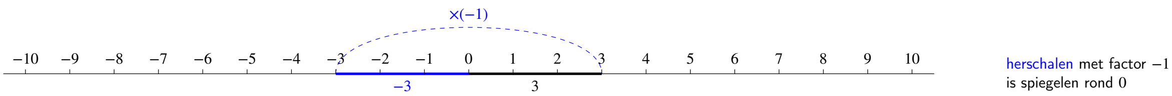
Bekijk het gebruik van getallen om te herschalen. Het getal 3 kan dienen om alles met een factor drie te vergroten. Door dat twee keer na elkaar te doen, wordt er vergroot met een factor $3 \times 3 = 9$.



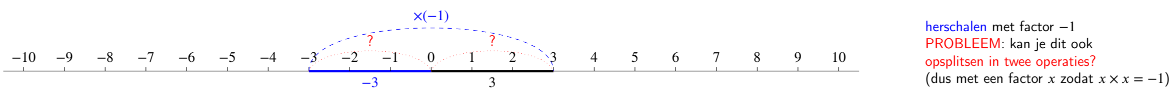
Maar wat als je *in twee stappen* met in totaal een factor 3 willen vergroten? Dan zoek je een getal x zodat $x \times x = 3$, en dergelijk getal is $\sqrt{3}$, de vierkantswortel van 3.



Vermenigvuldigen met -1 is spiegelen rond de oorsprong, als volgt:



Men kan zich afvragen of op één of andere manier ook het spiegelen van de getallenrechte kan worden opgesplitst in het herhalen van twee keer dezelfde operatie.



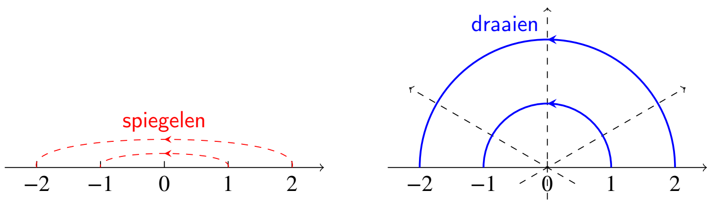
Om even over na te denken . . .

Denk je dat het mogelijk is om een operatie op de getallenas te vinden zodat deze operatie twee keer na elkaar uitvoeren de getallenas spiegelt rond te oorsprong?

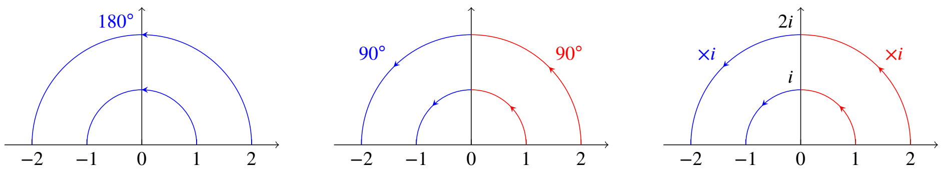
De eenvoudige, maar toch ook geniale oplossing oplossing staat op de volgende bladzijde. Maar je wil die eigenlijk toch graag zelf vinden.

1.1 Intro: nieuwe getallen voor meetkunde

De methode om 'in twee keer' te spiegelen bestaat uit twee delen: ten eerste om het probleem tweedimensionaal te bekijken, waardoor de oplossing voor het grijpen ligt.



Inderdaad, je kan de getallenrechte spiegelen door je blad 180° te draaien. Nu is het natuurlijk ook makkelijk een manier te vinden om dat in twee keer te doen: je draait twee keer een kwartslag!



draaien over 180° | twee keer draaien over 90° | twee keer vermenigvuldigen met i

Er is nu dus een nieuw getal i, dat zodanig is dat vermenigvuldigen met i niet betekent 'herschalen' maar 'draaien over een rechte hoek'. Het product van het reële getal 1 met i krijg je door het getal 1 over een hoek van $90°$ in tegenwijzerzin te draaien, en het nieuwe getal dat je dan vindt is $1 \cdot i = i$. En i is dus het punt $(0, 1)$ op de y-as.

Vlugge Vraag

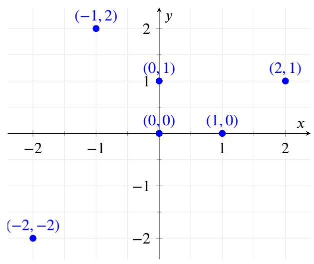
Waaraan is i^2 dus gelijk ...?

Om deze 'oplossing' van het probleem een nieuw 'getal' te noemen was veel durf nodig.

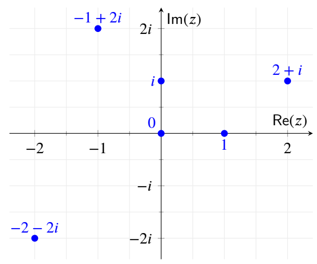
Vandaag worden deze nieuwe 'complexe' getallen gebruikt bij het programmeren van computergames, bij het berekenen van elektronische schakelingen en in de kwantummechanica.

1.2 Complexe getallen (meetkundige definitie)

Complexe getallen kan je beschouwen als een nieuwe manier om het reële vlak te bekijken.
Je weet al dat je door een x-as en een y-as in te voeren elk punt van het vlak met behulp van coördinaten kan schrijven als **een koppel** (a, b) reële getallen. Zo ligt bijvoorbeeld punt $(1, 0)$ op de x-as, punt $(2, 1)$ in het **eerste kwadrant**, en is $(0, 0)$ de **oorsprong**.



Het vlak met *koppels reële getallen* (a, b).



Het complexe vlak met *complexe getallen* $a + bi$

Door nu het punt $(0, 1)$ op de y-as een nieuwe naam i te geven, en het punt $(1, 0)$ op de x-as gewoon als 1, kan je het punt $(2, 1)$ ook schrijven als

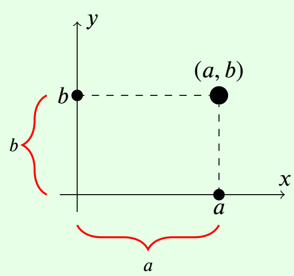
$$(2, 1) = (2, 0) + (0, 1) = 2 \cdot (1, 0) + (0, 1) = 2 + i$$

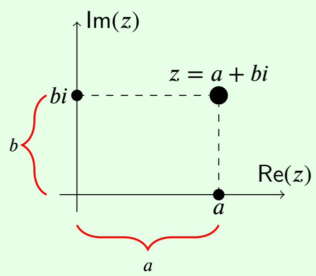
en een willekeurig punt (a, b) als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

Deze eenvoudige operatie lijkt op het eerste zicht misschien wat merkwaardig, maar zal blijken bijzonder interessant te zijn en een volledig nieuwe wiskundige wereld te openen met toepassingen in computerwetenschappen, fysica en ingenieurswetenschappen. De kracht volgt vooral uit de afspraak dat $i^2 = i \cdot i = -1$.

Definitie 1.2.1 (Complex getal)**.** Een **complex getal** is een uitdrukking van de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en i een nieuw symbool waarvoor we afspreken dat $\boxed{i^2 = -1}$. Een complex getal $a + bi$ kan je bekijken als een nieuwe schrijfwijze voor het punt (a, b). De **verzameling complexe getallen** noteren we met $\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}}$, en wordt ook het **complexe vlak** genoemd.





Voor $z = a + bi$ noemen we a het **reëel deel**, b het **imaginair deel** en we noteren $\boxed{\mathrm{Re}(z)} = \mathrm{Re}(a + bi) = a$, $\boxed{\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{Im}(a + bi) = b$.

Als $\mathrm{Im}(z) = b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal**, en
als $\mathrm{Re}(z) = a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Omdat complex getallen overeenkomen met punten in het vlak, zijn twee complexe getallen aan elkaar gelijk als ze dezelfde reële en imaginaire delen hebben:

$$\begin{array}{rccc} & a + bi = c + di & \iff & a = c \text{ en } b = d \\ \text{of ook} & z = w & \iff & \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ en } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w) \end{array}$$

1.2 Complexe getallen (meetkundige definitie)

Vlugge Vraag

Waar liggen de zuiver imaginaire getallen in het complexe vlak? En waar de zuiver reële getallen?

Opmerking 1.2.1 (Gelijkheid van complexe getallen)**.**

Het kan overbodig lijken om te vermelden wanneer twee complexe getallen $z = a + bi$ en $w = c + di$ aan elkaar gelijk zijn. Merk op dat een gelijkaardige regel voor breuken *niet* geldt: als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelijk zijn hoeft niet te gelden dat $a = c$ en $b = d$. De breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ zijn immers gelijk, maar hun tellers en noemers toch zijn verschillend.

Voorbeeld 1.2.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

z	Re(z)	Im(z)
$2+3i$	2	3
$5-6i$	5	-6
$1+i\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\frac{1-i\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

z	Re(z)	Im(z)
$1+\pi$	$1+\pi$	0
42	42	0
$42i$	0	42
$5i+7$	7	5
$2+5i+\pi$	$2+\pi$	5

De getallen 42 en $1+\pi$ zijn zuiver reële getallen, $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 1.2.1. Geef telkens het reëel en het imaginair deel van de volgende complexe getallen.

1. $8+3i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

2. $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

3. $7i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

4. 5 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

5. $5i-4$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

6. $\frac{1+2i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

7. i heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

8. $\frac{9+3i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

9. $\pi+i+e$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

10. 0 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

11. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

Oefening 1.2.2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk, door gebruik te maken van de gelijkheid $i^2 = -1$.

1. $i^2 = \dots\dots$ **3.** $-i^3 = \dots\dots$ **5.** $-i^4 = \dots\dots$ **7.** $i^{11} = \dots\dots$ **9.** $-i^2 = \dots\dots$

2. $i^5 = \dots\dots$ **4.** $i^4 = \dots\dots$ **6.** $i^{10} = \dots\dots$ **8.** $i^{12} = \dots\dots$ **10.** $i^{2028} = \dots\dots$

1.3 Optellen en vermenigvuldigen

Optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen volgen uit de gebruikelijke rekenregels. Door gebruik te maken van de rekenregel $i^2 = -1$ kan een complex getal telkens geschreven worden in de standaardvorm $a + bi$.

Definitie 1.3.1 (Som en product)**.** Voor reële getallen a, b, c, d geldt door uitwerken en $i^2 = -1$ dat

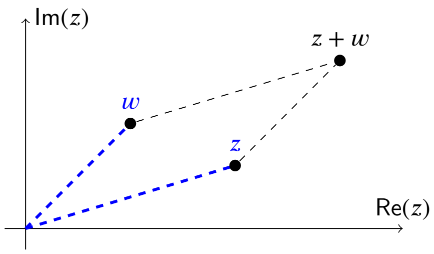
$$\boxed{(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i} \qquad \boxed{(1+2i)+(3+4i) = (1+3)+(2+4)i = 4+6i}$$

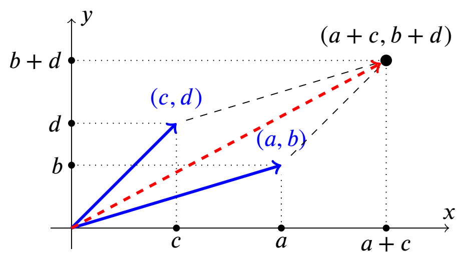
$$\boxed{\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}(1+2i)\cdot(3+4i) &= 1\cdot 3 + 1\cdot 4i + 2\cdot 3i + 2\cdot 4i^2\\ &= (3-8)+(4+6)i\\ &= -5+10i\end{aligned}}$$

Voorbeeld 1.3.1.

1. $(2-4i)+(3+5i) = 5+i$
2. $(3+i)-(1-2i) = 2+3i$
3. $(3+i)\cdot(1-2i) = 5-5i$
4. $(1-i)+(2+i) = 3$
5. $(-3+2i)+(3+5i) = 7i$
6. $(-3+2i)i = -2-3i$

De som van complexe getallen komt overeen met de som vectoren via de parallellogramregel:





Net zoals bij de reële getallen spreken we ook van het **tegengestelde** $-z = -(a+bi) = -a - bi$.

De vermenigvuldiging heeft een wat ingewikkeldere meetkundige interpretatie die elders wordt uitgelegd.

Oefening 1.3.1.

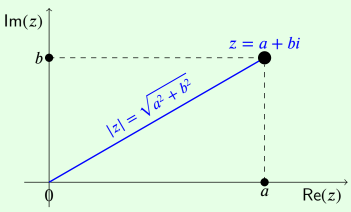
1. $(1+2i)\cdot(1-2i) = \ldots\ldots$
2. $(1+2i)\cdot\dfrac{1-2i}{2} = \ldots\ldots$
3. $(1+2i)\cdot i = \ldots\ldots$
4. $i^4 = \ldots\ldots$

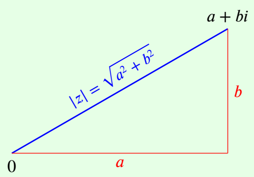
1.4 De norm van een complex getal

De *absolute waarde* $|a|$ van een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ geeft de afstand weer van dit punt tot de oorsprong op de reële rechte. Voor complexe getallen neemt men de afstand tot de oorsprong van het complexe vlak.

Definitie 1.4.1 (Modulus van een complex getal)**.**
De **modulus** (of **norm**) van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd $|z|$, is het *positief reëel* getal

$$\boxed{|z| \overset{\text{def}}{=} |a+bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}} \qquad \boxed{|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.}$$





De modulus $|z|$ is meetkundig **de afstand van z tot de oorsprong** (wegens Pythagoras).

Vlugge Vraag

Teken alle complexe getallen waarvoor $|z| = 1$ in het complexe vlak.

Voorbeeld 1.4.1.

1. $|i| = 1$ **3.** $|-2| = 2$ **5.** $|1-1| = 0$ **7.** $|3-4i| = 5$

2. $|-i| = 1$ **4.** $|2i| = 2$ **6.** $|1| + |-1| = 2$ **8.** $|1+i| = \sqrt{2}$

De modulus heeft volgende basiseigenschappen:

Eigenschap 1.4.1 (Eigenschappen modulus)**.** Voor complexe getallen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

(a) $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong.

(b) $|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2.

(c) $|z| = |-z|$.

(d) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Bewijs Oefening. ■

LET OP: in het algemeen geldt niet $\cancel{|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|}$ (want bv. $0 = |1+(-1)| \neq |1|+|-1| = 2$)

1.5 De complex toegevoegde van een complex getal

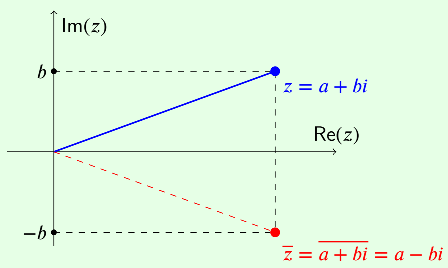
Complexe getallen kan je spiegelen rond de x-as, en dat zal blijken een bijzonder nuttige operatie te zijn, die geen equivalent heeft voor een reëel getal. Terwijl men bij spiegelen door de oorsprong spreekt over het *tegengestelde* $-z$, noemt men de over de x-as gespiegelde het **complex toegevoegde** $\overline{z}$.

Definitie 1.5.1 (Complex toegevoegde van een complex getal)**.**

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a + bi$, genoteerd $\overline{z}$, is het *complexe* getal

$$\boxed{\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a - bi} \qquad \boxed{\overline{3+4i} = 3 - 4i.}$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



Voorbeeld 1.5.1.

1. $\overline{3-4i} = 3 + 4i$ **3.** $\overline{-3-4i} = -3 + 4i$ **5.** $\overline{i} = -i$

2. $\overline{3+4i} = 3 - 4i$ **4.** $\overline{-3} = -3$ **6.** $\overline{-i} = i$

Volgende eigenschap, waarvan het bewijs een oefening is, geeft aan dat complex toevoegen compatibel is met optelling en vermenigvuldiging.

Eigenschap 1.5.1 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.** Voor complexe getallen z en w geldt

$$\boxed{\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}} \qquad \boxed{\overline{(2+3i)+(4+5i)} = 6 - 8i = \overline{2+3i} + \overline{4+5i}}$$

$$\boxed{\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}} \qquad \boxed{\overline{(2+3i)\cdot(4+5i)} = -7 - 22i = \overline{2+3i} \cdot \overline{4+5i}}$$

Oefening 1.5.1. Bereken voor een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \overline{z} = \ldots\ldots$ **2.** $z - \overline{z} = \ldots\ldots$ **3.** $z \cdot \overline{z} = \ldots\ldots$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond:

Eigenschap 1.5.2 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.** Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt

$$\boxed{\overline{\overline{z}} = (\overline{\overline{z}}) = z} \qquad \boxed{\overline{\overline{(2+3i)}} = \overline{2-3i} = 2 + 3i}$$

$$\boxed{z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)} \qquad \boxed{2 + 3i \ + \ \overline{2+3i} = 2 + 3i + 2 - 3i = 4 = 2\text{Re}(2+3i)}$$

$$\boxed{z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)} \qquad \boxed{2 + 3i \ - \ \overline{2+3i} = 2 + 3i - 2 + 3i = 6i = 2i\text{Im}(2+3i)}$$

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2} \qquad \boxed{(2+3i)(2-3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13 = |2+3i|^2}$$

Zowel de som als het product van een getal z en zijn complex toegevoegde $\overline{z}$ zijn steeds *reëel*, en dat zal een manier opleveren om het inverse z^{-1} te berekenen, en dus het quotiënt van twee complexe getallen.

1.6 De deling van complexe getallen

Uit de formule $z\overline{z} = |z|^2$ en de bewerking

$$z\overline{z} = |z|^2 \iff \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1 \iff z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

volgt dat $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ de inverse is van z, want hun product is 1.

Eigenschap 1.6.1. Voor een complex getal z geldt

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}} \qquad \boxed{(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i}$$

Hieruit volgt ook onmiddellijk een manier om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen:

Eigenschap 1.6.2. Voor een complexe getal z en w geldt

$$\boxed{\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2}} \qquad \boxed{\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i}$$

Voorbeeld 1.6.1. Bereken $\frac{3+2i}{1-5i} = -\frac{7}{26} + \frac{7}{26}i$.

Uitwerking: De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\frac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $a+bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a+bi$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2+3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2-3\sqrt{2}$.

Oefening 1.6.1. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a+bi$:

1. $\frac{1}{1+2i} = \ldots\ldots$

2. $\frac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$

3. $\frac{3+4i}{1+2i} = \ldots\ldots$

1.7 Tweedegraadsvergelijkingen in de complexe getallen

Wiskundigen zijn dikwijls erg enthousiast over complexe getallen omdat ze de wiskunde vereenvoudigen. Dit lijkt voor sommigen misschien moeilijk te geloven, maar we zullen het proberen aan te tonen door het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen opnieuw te bestuderen nu we stilaan vertrouwd raken met de complexe getallen.

In de tweede graad werd reeds gezien hoe je tweedegraadsvergelijkingen oplost:

Opmerking 1.7.1 (Vierkantsvergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen in $\mathbb{R}$.).

Eigenschap 1.7.1.

Een (reële) tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft als **discriminant** het (reële) getal $\boxed{D = b^2 - 4ac}$, en heeft als oplossingen

als $D < 0$: geen reële oplossingen

als $D = 0$: precies een reële oplossing, namelijk $\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$

als $D > 0$: precies twee reële oplossingen, namelijk $\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}}$ en $\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

Bovendien zijn de volgende uitspraken equivalent:

(a) x_1 en x_2 zijn oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$
(b) x_1 en x_2 zijn nulpunten van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$
(c) x_1 en x_2 zijn snijpunten van de kromme $y = ax^2 + bx + c$ met de x-as
(d) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (ontbinden in factoren)
(e) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (som en product van de wortels)

Een negatieve discriminant stelde in de tweede graad een probleem, want uit negatieve getallen kan je in de reële getallen geen vierkantswortels trekken. Bij complexe getallen verdwijnt dat probleem:

Eigenschap 1.7.2.

Een (reële) tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft altijd twee complex toegevoegde oplossingen, namelijk

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{en} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

die echter samenvallen als $b^2 - 4ac = 0$, en dan gelijk worden aan $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Het begrip discriminant wordt dus in zekere zin overbodig (of minstens veel minder belangrijk).

Voorbeeld 1.7.1.

1. De wortels van de vergelijking $x^2 + 4 = 0$ zijn $x_1 = 2i$ en $x_2 = -2i$.
2. De wortels van de vergelijking $x^2 + x + 1 = 0$ zijn $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Oefening 1.7.1. Bereken de wortels van volgende vergelijkingen.

1. $x^2 + 2x + 3 = 0$

1.7 Tweedegraadsvergelijkingen in de complexe getallen

2. $2x^2 + 3x + 4 = 0$

Oefening 1.7.2. Ontbind volgende veeltermen in lineaire factoren.

1. $x^2 + 2x + 3$

2. $2x^2 + 3x + 4$

1.8 De complexe getallen vormen een veld

Wiskundigen hebben onderzocht waaraan dingen zouden moeten voldoen om ze redelijkerwijze 'getallen' te willen noemen. Het lijkt evident dat we 'getallen' willen kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Van een voldoende rijke verzameling getallen verwachten we ook dat elk getal een tegengestelde heeft, en ook een inverse. Bovendien moeten de optelling en de vermenigvuldiging natuurlijk 'compatibel' zijn, zo willen we bijvoorbeeld dat $x + x = 2 \cdot x$ voor elk getal x.

Sinds het begin van de twintigste eeuw werden volgende eisen vastgelegd om voldoende eigenschappen van de 'gewone' reële getallen te behouden. We formuleren ze hier voor de complexe getallen $\mathbb{C}$.

Eigenschap 1.8.1. $\mathbb{C}, +$ is een commutatieve groep. Dat betekent

(Gs1)	$\forall u, v \in \mathbb{C}:$	$u + v \in \mathbb{C}$	(intern)
(Gs2)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}:$	$(u + v) + w = u + (v + w)$	(associatief)
(Gs3)	$\forall u \in \mathbb{C}:$	$u + 0 = u = 0 + u$	(neutraal element)
(Gs4)	$\forall u \in \mathbb{C}, \exists -u \in \mathbb{C}:$	$u + (-u) = 0 = (-u) + u$	(tegengestelde)
(Gs5)	$\forall u, v \in \mathbb{C}:$	$u + v = v + u$	(commutatief)

Eigenschap 1.8.2. $\mathbb{C}_0, \cdot$ is een commutatieve groep. Dat betekent

(Gp1)	$\forall u, v \in \mathbb{C}_0:$	$u \cdot v \in \mathbb{C}$	(intern)
(Gp2)	$\forall u, v, w \in \mathbb{C}_0:$	$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$	(associatief)
(Gp3)	$\forall u \in \mathbb{C}_0:$	$u \cdot 1 = u = 1 \cdot u$	(neutraal element)
(Gp4)	$\forall u \in \mathbb{C}_0, \exists u^{-1} \in \mathbb{C}:$	$u \cdot u^{-1} = 1 = u^{-1} \cdot u$	(tegengestelde)
(Gp5)	$\forall u, v \in \mathbb{C}_0:$	$u \cdot v = v \cdot u$	(commutatief)

De compatibiliteit tussen plus en maal heet de **distributiviteit**:

Eigenschap 1.8.3. De vermenigvuldiging is distributief ten opzichte van de optelling:

(D1) $\forall u, v, w \in \mathbb{C}: \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ ($\cdot$ is distributief t.o.v. $+$)

De voorgaande eigenschappen worden samengevat in het wiskundige begrip **veld**:

Definitie 1.8.1. De complexe getallen $\mathbb{C}, +, \cdot$ met de optelling en de vermenigvuldiging vormen een **veld** omdat ze voldoen aan bovenstaande eigenschappen van

1) commutatieve groep voor de optelling (Gs1)-(Gs5),
2) commutatieve groep voor de vermenigvuldiging (Gp1)-(Gp5),
3) distributiviteit van de optelling ten opzichte van de vermenigvuldiging (D1).

Ook de rationale getallen $\mathbb{Q}, +, \cdot$ en de reële getallen $\mathbb{R}, +, \cdot$ zijn voorbeelden van velden.

Vlugge Vraag

Waarom zijn de natuurlijke getallen $\mathbb{N}, +, \cdot$ *geen* veld?

Vlugge Vraag

Vormen de gehele getallen $\mathbb{Z}, +, \cdot$ een veld?

Een erg belangrijke en interessante eigenschap van reële getallen is bovendien dat ze geordend zijn:

Eigenschap 1.8.4. De reële getallen $\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$ zijn een totaal geordend veld, dat betekent

$\mathbb{R}, +, \cdot$ is een veld, en bovendien geldt

1.8 De complexe getallen vormen een veld

(Ot1)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$:	als $x \leq y$ en $y \leq x$	dan $x = y$	(antisymmetrie)
(Ot2)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:	als $x \leq y$ en $y \leq z$	dan $x \leq z$	(transitief)
(Ot3)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$:	$u \leq v$ of $v \leq u$	(of beide)	(totaal)

waarbij de orde $\leq$ compatibel is met som $+$ en het product $\cdot$, dus

(Oc1)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$:	als $x \leq y$	dan $x + z < y + zy$	(compatibel met $+$)
(Oc2)	$\forall x, y \in \mathbb{R}$:	als $0 \leq x$ en $0 < y$	dan $0 < x \cdot y$	(compatibel met $\cdot$)

Opmerking 1.8.1.

Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee complexe getallen dus niet zeggen welk "het kleinsteïs.
In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2 + 3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1 + i$ *positief* is en $-1 - i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.

WISKUNDE.OPMAAT.ORG

Hoofdstuk 2

Goniometrische voorstelling

(Versie 2025/02/26H.53)

2.1 De polaire schrijfwijze van complexe getallen

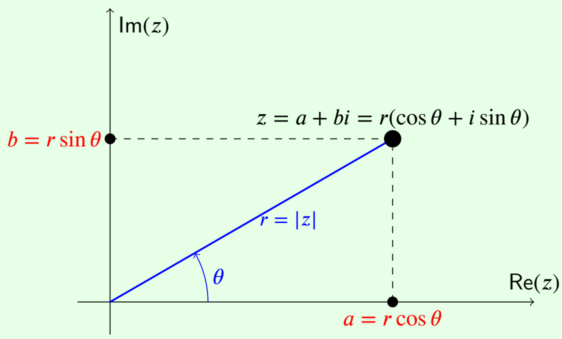
In het vorig hoofdstuk werd een punt in het complexe vlak beschreven met behulp van carthesische coordinaten. In dit hoofdstuk wordt een alternatieve manier behandeld om punten in het complexe vlak te beschrijven. Hiermee zullen verschillende operaties van complexe getallen, waaronder de vermenigvuldig, veel eenvoudiger en inzichtelijker worden.

Vlugge Vraag

Is er een andere manier waarmee je een punt in het vlak zou kunnen beschrijven?

De carthesische schrijfwijze associeert met een elk complex getal $z = a + bi$ het koppel (a, b). Het reeël deel a komt overeen met de projectie op de reële as, het imaginair deel b komt overeen met de projectie op de imaginaire as. De polaire vorm associeert met elk complex getal in het vlak een koppel poolcoördinaten (r, θ). Hierbij is $r = |z|$ de norm (afstand tot de oorsprong) en θ de hoek die de overeenkomstige vector maakt met de positieve reële as. Op die manier wordt elk complex getal beschreven met een uniek koppel poolcoordinaten.

Definitie 2.1.1. De *poolcoördinaten* van een complex getal zijn het koppel (r, θ), hierbij is $r = |z|$ de **modulus** en θ het **argument**. De hoek θ wordt gemeten in radialen, in tegenwijzerzin, en is slechts op een veelvoud van 2π na bepaald.



Op die manier krijgt elk complexe getal een polaire schrijfwijze $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Men kan een complexe getal in carthesische schrijfwijze $z = a + bi$ omvormen naar polaire vorm $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en vice versa. Het zal blijken dat sommige berekeningen veel eenvoudiger zijn in één van beide schrijfwijzes. De stelling van pythagoras en de goniometrische getallen leggen het verband tussen de carthesische en polaire schrijfwijze.

Eigenschap 2.1.1 (Transformatieformules cartesische en goniometrische schrijfwijze)**.**

Een complex getal z met goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ heeft als cartesische schrijfwijze $a + bi$ met:

$$\boxed{a = r\cos\theta}$$
$$\boxed{b = r\sin\theta}$$

Een complex getal z met cartesische schrijfwijze $a + bi$ heeft als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta +$

$i\sin\theta)$ met:

$$\boxed{r = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Vlugge Vraag

Gebruik de stelling van pythagoras en de defitie van de cosinus, sinus en tangens in een rechthoekige driehoek om bovenstaande formules af te leiden.

Opmerking 2.1.1.

- Omdat θ niet uniek bepaald is, heeft elk complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *oneindig veel goniometrische schrijfwijzes* $z = r\,(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, met $k \in \mathbb{Z}$. Vaak wordt er echter voor gekozen om θ tussen 0 en 2π te geven: we kunnen ons sneller voorstellen waar de hoek $\frac{5\pi}{4}$ ligt dan de hoek $\frac{1093\pi}{4}$.
- Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 2.1.1.

Geef de goniometrische schrijfwijze van volgende complexe getallen waarvan het argument gemakkelijk grafisch gevonden kan worden:

1. $z = 1$

2. $z = i$

3. $z = 1 + i$

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Merk op: bij het opschrijven van de goniometrische schrijfwijze met concrete getallen moet je de sin en cos laten staan. Als je die toch zou uitrekenen, krijg je immers terug de cartesische schrijfwijze.

Opmerking 2.1.2.

Als $a \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \text{als } a \neq 0$$

Als $a > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{als } a > 0$$

Als $a < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \qquad \text{als } a < 0$$

2.1 De polaire schrijfwijze van complexe getallen

Als $a = 0$, dan ligt $z = a + bi$ op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{bgtan} \frac{b}{a} & \text{als } a > 0 \\ \pi + \operatorname{bgtan} \frac{b}{a} & \text{als } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

2.2 De vermenigvuldiging in polaire vorm

Het optellen van complexe getallen is erg eenvoudig in de cartesische schrijfwijze, het correspondeert immers met het optellen van vectoren. Bij de vermenigvuldigen van complexe getallen is de polaire schrijfwijze erg eenvoudig, ook deze bewerking correspondeert met een meetkundige operatie in het complexe vlak. Zij $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ complexe getallen. Met behulp van de som- en verschilformules van goniometrische getallen levert een rechtstreekse berekening:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)), \end{aligned}$$

De moduli r_i worden vermenigvuldigd, en de argumenten θ_i worden opgeteld.

Eigenschap 2.2.1 (Vermenigvuldiging van twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze)**.**

De *modulus* van het product van twee complexe getallen is het *product van de moduli* van die getallen.

Het *argument* van het product van twee complexe getallen is de *som van de argumenten* van die getallen.

Voor $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ wordt het product gegeven door

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

Oefening 2.2.1. Gegeven zijn de complexe getallen:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_2 &= 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

Bereken algebraïsch de volgende complexe getallen en geef het resultaat in cartesische en polaire vorm.

1. $z_1 \cdot z_2$

2. $(z_1)^2$

3. $\frac{z_2}{z_1}$

2.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

De n-de macht van een complexe getal z^n is het n-voudig product $z \cdot z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$. (n-keer invoegen). Met de vermenigvuldiging van complexe getallen kan dit n-voudig product uitgerekend worden. Ook hier zijn de berekeningen met de goniometrische schrijfwijze veel eenvoudiger.

Het meest eenvoudige geval $n = 2$ is het kwadraat z^2 van een complex getal. Dit is de vermenigvuldiging van het complex getal met zichzelf. Voor een complex getal z met als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ wordt dit:

$$z^2 = z \cdot z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^2(\cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)) = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Het herhalen van deze methode levert dan hogere machten van een complex getal. $z^3 = z^2 \cdot z$. Het algemene resultaat staat bekend als de formule van DeMoivre:

Eigenschap 2.3.1 (Formule van De Moivre)**.**
Voor een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en elk natuurlijk getal n geldt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Voorbeeld 2.3.1. We kunnen $(1+i)^8$ op 2 manieren berekenen:

(a) $(1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$, dus $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = (2i)^2 = -4$, dus $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

(b) $1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, dus $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i\cdot 0) = 16$

Oefening 2.3.1. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = \ldots\ldots$

2. $(-1-i)^{20} = \ldots\ldots$

3. $(1+i)^{21} = \ldots\ldots$

4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = \ldots\ldots$

Oefening 2.3.2. Gegeven is het complex getal $z = \cos(\frac{3\pi}{4} + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$.

1. Bereken $z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots, z^8$ en schrijf telkens het resultaat in cartesische vorm.

2. Stel de opeenvolgende machten van z voor in het complexe vlak. Wat valt je op?

2.4 Wortels van complexe getallen

Het begrip n-de machtswortel van de reële getallen kan op het eerste zicht ook eenvoudig worden gebruikt bij complexe getallen. Er treden echter enkele nieuwe fenomenen op.

Definitie 2.4.1.

Voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ en complex getal $w \in \mathbb{C}$ is een complex getal $z \in \mathbb{C}$ **een n-de machtswortel van** w als de n-de macht van z gelijk is aan w:

z is **een n-de machtswortel van** $w \iff z^n = w$

$2^4 = (-2)^4 = 16, \quad (-2i)^3 = 8i$

Voorbeeld 2.4.1. Welke van volgende uitspraken zijn waar?

1. Juist ✓ 3 is een derdermachtswortel van 27
2. Fout ✓ -3 is een derdermachtswortel van 27
3. Juist ✓ i is een vierkantswortel van -1
4. Fout ✓ $2+3i$ is een vierkantswortel van $4+9i$
5. Juist ✓ $2+3i$ is een vierkantswortel van $-5+12i$

Opmerking 2.4.1.

- Net zoals bij de reële getallen is het begrip n-de machtswortel van a dus eigenlijk gewoon een naam voor *een oplossing van de vergelijking* $x^n = a$.
- Bij de reële getallen was er een belangrijk onderscheid tussen n even en n oneven omdat negatieve getallen geen even machtswortels hebben, en positieve getallen twee even machtswortels hebben:

$$\begin{array}{rll} x^2 = 4 & \text{heeft twee reële oplossingen:} & x = 2 \text{ en } x = -2 \\ x^2 = -4 & \text{heeft geen reële oplossingen:} & x^2 \neq -4, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^3 = 8 & \text{heeft een unieke reële oplossing:} & x = 2 \\ x^3 = -8 & \text{heeft een unieke reële oplossing:} & x = -2 \end{array}$$

  Er zijn altijd ten hoogste twee reële n-de machtswortels, en als $a \in \mathbb{R}$ twee n-de machtswortel had noemden we de unieke positieve **de** n-machtswortel, en noteerden die met $\sqrt[n]{a}$ of $a^{1/n}$. Voor n even was dan ook $-\sqrt[n]{a}$ *een* n-de machtswortel.
- Bij complexe getallen is de zaak enerzijds eenvoudiger: we zullen zien dat er *altijd* precies n n-de machtswortels zijn. Anderzijds is het niet meer mogelijk om over **de** n-de machtswortel te spreken. We zullen dan ook de notatie $\sqrt[n]{z}$ of $z^{1/n}$ niet gebruiken.

Vergelijkingen van de vorm $z^n = a + bi$ met $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ zijn met de formule van De Moivre op te lossen.

Voorbeeld 2.4.2. Bereken alle vierkantswortels van $1-i$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

2.4 Wortels van complexe getallen

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta).$$

Voor het rechterlid $1 - i$ geldt

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4},$$

zodat

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

De vergelijking $z^2 = 1 - i$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^2 = \sqrt{2} \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2^{1/4}$ en $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We hebben de onbekenden r en θ dus gevonden.

Voor $k = 0$ is $\theta = -\frac{\pi}{8}$ en voor $k = 1$ is $\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van beide hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus precies twee verschillende oplossingen

$$z_1 = 2^{1/4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) \qquad \text{en} \qquad z_2 = 2^{1/4}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)$$

Voorbeeld 2.4.3. Vind alle vierdemachtswortels uit 1.

Uitwerking: We zoeken alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$.

We stellen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta).$$

Voor het rechterlid 1 geldt

$$|1| = 1, \qquad \arg(1) = 0,$$

zodat

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$

De vergelijking $z^4 = 1$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

Gelijkheid van complexe getallen leert ons dat

$$r^4 = 1 \text{ met } r \in \mathbb{R}^+ \text{ en } 4\theta = 0 + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 1$, want $r^4 = 1$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = k\pi/2$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Dit levert vier verschillende wortels.
$z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$,
$z_2 = 1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2) = i$,
$z_3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$,
$z_4 = 1(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2) = -i$.

Dit voorbeeld kan je veel sneller oplossen door $z^4 - 1$ te ontbinden in factoren:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

De nulpunten hiervan zijn inderdaad 1,-1,i,-i. Ontbinden in factoren lukt echter niet meer bij bijvoorbeeld $z^5 = 1$, hiervoor moet je bovenstaande methode gebruiken.

2.4 Wortels van complexe getallen

Oefening 2.4.1. Bereken alle derdemachtswortels van $8i$.

Je kan de vergelijking $z^n = w$ oplossen voor een algemeen getal $w \in \mathbb{C}$, en dan krijg je formules die je daarna kan gebruiken. Het resultaat geeft volgende interessante eigenschap: de vergelijking $z^n = w$ heeft voor elke $w \in \mathbb{C}_0$ precies n oplossingen:

Eigenschap 2.4.1. Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ en $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}_0$ heeft de vergelijking $z^n = w$ precies n verschillende complexe oplossingen

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right), \text{ met } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Bewijs TODO ? ■

Liefhebbers van de Euler notatie kunnen veel eenvoudiger schrijven

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta + 2\pi k}{n}} \text{ met } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

2.5 Quaternionen en videogames