De deling van complexe getallen

Uit de formule $z\overline{z} = |z|^2$ en de bewerking

$$z\overline{z} = |z|^2 \iff \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1 \iff z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

volgt dat $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ de inverse is van z, want hun product is 1.

Eigenschap 1. Voor een complex getal z geldt

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}} \qquad \boxed{(3+4i)^{-1} = \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i}$$

Hieruit volgt ook onmiddellijk een manier om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen:

Eigenschap 2. Voor een complexe getal z en w geldt

$$\boxed{\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{|z|^2}} \qquad \boxed{\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i}$$

Voorbeeld 1. Bereken $\frac{3+2i}{1-5i} = -\frac{7}{26} + \frac{7}{26}i$.

Uitwerking: De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\frac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $a+bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a+bi$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2+3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2-3\sqrt{2}$.

Oefening 1. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a+bi$:

1. $\frac{1}{1+2i} = \ldots\ldots$

2. $\frac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$

3. $\frac{3+4i}{1+2i} = \ldots\ldots$