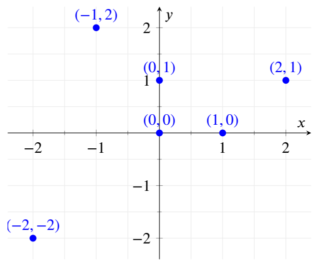
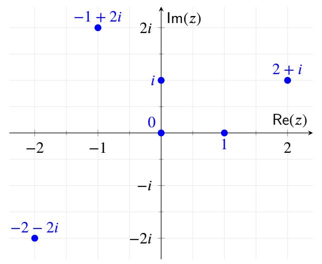
Complexe getallen (meetkundige definitie)

Complexe getallen kan je beschouwen als een nieuwe manier om het reële vlak te bekijken.
Je weet al dat je door een x-as en een y-as in te voeren elk punt van het vlak met behulp van coördinaten kan schrijven als **een koppel** (a, b) reële getallen. Zo ligt bijvoorbeeld punt $(1, 0)$ op de x-as, punt $(2, 1)$ in het **eerste kwadrant**, en is $(0, 0)$ de **oorsprong**.



Het vlak met *koppels reële getallen* (a, b).



Het complexe vlak met *complexe getallen* $a + bi$

Door nu het punt $(0, 1)$ op de y-as een nieuwe naam i te geven, en het punt $(1, 0)$ op de x-as gewoon als 1, kan je het punt $(2, 1)$ ook schrijven als

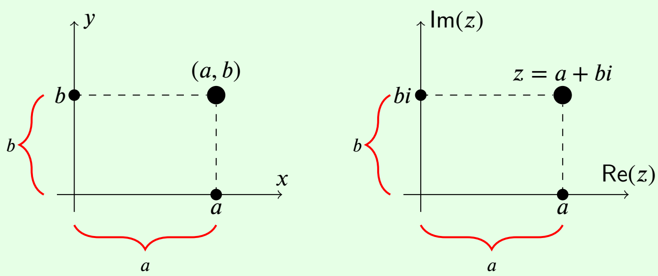
$$(2, 1) = (2, 0) + (0, 1) = 2 \cdot (1, 0) + (0, 1) = 2 + i$$

en een willekeurig punt (a, b) als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a + bi$$

Deze eenvoudige operatie lijkt op het eerste zicht misschien wat merkwaardig, maar zal blijken bijzonder interessant te zijn en een volledig nieuwe wiskundige wereld te openen met toepassingen in computerwetenschappen, fysica en ingenieurswetenschappen. De kracht volgt vooral uit de afspraak dat $i^2 = i \cdot i = -1$.

Definitie 1 (Complex getal)**.** Een **complex getal** is een uitdrukking van de vorm $a+bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en i een nieuw symbool waarvoor we afspreken dat $\boxed{i^2 = -1}$. Een complex getal $a+bi$ kan je bekijken als een nieuwe schrijfwijze voor het punt (a, b). De **verzameling complexe getallen** noteren we met $\boxed{\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R};\ i^2 = -1\}}$, en wordt ook het **complexe vlak** genoemd.



Voor $z = a + bi$ noemen we a het **reëel deel**, b het **imaginair deel** en we noteren

$$\boxed{\mathrm{Re}(z)} = \mathrm{Re}(a + bi) = a$$
$$\boxed{\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{Im}(a + bi) = b .$$

Als $\mathrm{Im}(z) = b = 0$, dan is $z = a$ een **(zuiver) reëel getal**, en
als $\mathrm{Re}(z) = a = 0$, dan is $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Omdat complex getallen overeenkomen met punten in het vlak, zijn twee complexe getallen aan elkaar gelijk als ze dezelfde reële en imaginaire delen hebben:

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ en } b = d$$

of ook

$$z = w \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \text{ en } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

Complexe getallen (meetkundige definitie)

Vlugge Vraag

Waar liggen de zuiver imaginaire getallen in het complexe vlak? En waar de zuiver reële getallen?

Opmerking 1 (Gelijkheid van complexe getallen)**.**

Het kan overbodig lijken om te vermelden wanneer twee complexe getallen $z = a + bi$ en $w = c + di$ aan elkaar gelijk zijn. Merk op dat een gelijkaardige regel voor breuken *niet* geldt: als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gelijk zijn hoeft niet te gelden dat $a = c$ en $b = d$. De breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{6}$ zijn immers gelijk, maar hun tellers en noemers toch zijn verschillend.

Voorbeeld 1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

z	Re(z)	Im(z)
$2 + 3i$	2	3
$5 - 6i$	5	-6
$1 + i\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\frac{1 - i\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$

z	Re(z)	Im(z)
$1 + \pi$	$1 + \pi$	0
42	42	0
$42i$	0	42
$5i + 7$	7	5
$2 + 5i + \pi$	$2 + \pi$	5

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, $42i$ is een zuiver imaginair getal.

Oefening 1. Geef telkens het reëel en het imaginair deel van de volgende complexe getallen.

1. $8 + 3i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

2. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

3. $7i$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

4. 5 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

5. $5i - 4$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

6. $\frac{1 + 2i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

7. i heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

8. $\frac{9 + 3i}{3}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

9. $\pi + i + e$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

10. 0 heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

11. $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5}i}{\sqrt{5}}$ heeft reëel deel …… en imaginair deel …….

Oefening 2. Schrijf zo eenvoudig mogelijk, door gebruik te maken van de gelijkheid $i^2 = -1$.

1. $i^2 = \ldots\ldots$ **3.** $-i^3 = \ldots\ldots$ **5.** $-i^4 = \ldots\ldots$ **7.** $i^{11} = \ldots\ldots$ **9.** $-i^2 = \ldots\ldots$

2. $i^5 = \ldots\ldots$ **4.** $i^4 = \ldots\ldots$ **6.** $i^{10} = \ldots\ldots$ **8.** $i^{12} = \ldots\ldots$ **10.** $i^{2028} = \ldots\ldots$